

2010年度幾何学特別演習II 問題 11月24日

演習問題6 - 1 . 像への同相写像 $i_0, i_1 : X \rightarrow Y$ に対して、 Y の同相写像 $f : Y \rightarrow Y$ で、恒等写像 id_Y とホモトピックであり、 $i_1 = f \circ i_0$ を満たすものが存在するとする。 $i_0(X)$ が Y の開集合、 $i_0(A)$ が Y の閉集合である時、 $(i_0)_* : (X, X \setminus A) \rightarrow (Y, Y \setminus i_0(A))$, $(i_1)_* : (X, X \setminus A) \rightarrow (Y, Y \setminus i_1(A))$ は、ホモロジー群の同型を誘導し、 $j_0 : Y \rightarrow (Y, Y \setminus i_0(A))$, $j_1 : Y \rightarrow (Y, Y \setminus i_1(A))$ に対し、 $(i_1)_*^{-1}(j_1)_* = (i_0)_*^{-1}(j_0)_*$ が成立することを示せ。

$i_0(X)$ が Y の閉集合、 $i_0(A)$ が Y の開集合である時も、演習問題4 - 1の条件を満たせば、 $(i_0)_*$ はホモロジー群の同型を誘導し、 $(i_1)_*^{-1}(j_1)_* = (i_0)_*^{-1}(j_0)_*$ が成立する。

n を1以上の整数として、 $f : (D_1^n, S_1^{n-1}) \rightarrow (D_2^n, S_2^{n-1})$ あるいは $f : S_1^n \rightarrow S_2^n$ の写像度 $\deg(f)$ を $f_* : H_n(D_1^n, S_1^{n-1}) \rightarrow H_n(D_2^n, S_2^{n-1})$ あるいは $f_* : H_n(S_1^n) \rightarrow H_n(S_2^n)$ について、 $f_*[D_1^n, S_1^{n-1}] = \deg(f)[D_2^n, S_2^{n-1}]$ あるいは $f_*[S_1^n] = \deg(f)[S_2^n]$ で定義する。ここで、 $[]$ は n 次元ホモロジー群 ($\cong \mathbf{Z}$) の指定された生成元である。

演習問題6 - 2 . (1) $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = -x$ とするとき、

$\deg(f : (D^1, S^0) \rightarrow (D^1, S^0)) = -1$ を示せ。

ヒント : $[D^1, S^0] \in H^1(D^1, S^0)$ は、 $\partial_*[D^1, S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle \in H_0(\{-1, 1\})$ で定まっている。

(2) $\iota : [-1, 1] \rightarrow D^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1([-1, 1], \{-1, 1\}) \xrightarrow{\iota_*} H_1(D^1, D^1 \setminus \text{Int}(\iota([-1, 1]))) \xleftarrow{j_*} H_1(D^1, S^0)$$

について、 $\iota_*[-1, 1], \{-1, 1\}] = \pm j_*[D^1, S^0]$ で、 \pm は ι が向きを保つとき $+$ 、向きを反対にするとき $-$ となることを示せ。

ヒント : ι が向きを保つとき、 ι と $i = \text{id} : ([-1, 1], \{-1, 1\}) \rightarrow (D^1, D^1 \setminus \text{Int}(\iota([-1, 1])))$ は、ホモトピックである。

(3) $\iota : D^1 \rightarrow S^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1, S^1 \setminus \text{Int}(\iota(D^1))) \xleftarrow{\iota_*} H_1(D^1, S^0)$$

について、 $\iota_*[D^1, S^0] = \pm j_*[S^1]$ で、 \pm は ι が向きを保つとき $+$ 、向きを反対にするとき $-$ となることを示せ。

ヒント : 演習問題6 - 1、4 - 1を用いる。

(4) $f_k : S^1 \rightarrow S^1$ を $f_k(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = e^{2k\pi\sqrt{-1}\theta}$ で定義する。 $\deg(f_k) = k$ を示せ。

ヒント: $f_k^{-1}(S^1_+) = J_k$ とおく。 $k \geq 1$ のとき、 $S^1 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上では $J_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} [\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}]$ と表される。 $f_k : (S^1, J_k) \rightarrow (S^1, S^1_+)$ をみる。 $k = 0$ に対しては、 f_0 は定値写像である。 $k < 0$ に対しては、 $\deg(f_{-1}) = -1$ を示し、 $f_k = f_{-1} \circ f_{-k}$ を用いる。

演習問題 6 - 3 . 1次元胞複体 X は、頂点の有限集合 $X^{(0)} = \{v_1, \dots, v_{k(0)}\}$ および辺の集合 $\{e_1, \dots, e_{k(1)}\}$ ($e_i \approx [-1, 1]$) について、各 e_i の境界 ∂e_i と $X^{(0)} = \{v_1, \dots, v_{k(0)}\}$ の点との同一視 $a_i^1 : \partial e_i \rightarrow X^{(0)}$ が与えられたものである。

$$X = X^{(0)} \cup e_1 \cup \dots \cup e_{k(1)}$$

1次元連結有限胞複体のホモロジー群を求めよ。

ヒント: $(X, X^{(0)})$ のホモロジー完全列において、 $H_1(X, X^{(0)}) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^{(0)})$ は、準同型 $\mathbf{Z}^{k(1)} \rightarrow \mathbf{Z}^{k(0)}$ である。また、 $H_0(\{v_i\}) \rightarrow H_0(X)$ の像と $H_0(\{v_j\}) \rightarrow H_0(X)$ の像は、 $a_\ell^1(\partial e_\ell) = \{v_i, v_j\}$ となる e_ℓ があれば一致する。一方、連結を仮定している。

問題 6 - 4 . 1次元連結有限胞複体のホモトピー同値類はオイラー数で分類されることを示せ。

空間対 (X, A) , 連続写像 $\varphi : A \rightarrow Y$ について、 $Z = Y \cup_\varphi X$ を次のような位相空間として定義する。直和 $X \sqcup Y$ 上の同値関係 \sim を $x \in A$ について、 $x \sim \varphi(x)$ となるような最小のものとして定義し、 $Z = (X \sqcup Y) / \sim$ とおき、商位相をいれる。 $Y \rightarrow Z$ は単射で像への同相写像であり、これにより、 $Y \subset Z$ と考え、空間対 (Z, Y) が定義される。また、 $X \setminus A \rightarrow Z$ も単射で像への同相写像である。

問題 6 - 5 . X, Y がハウスドルフ空間で、 A がコンパクト集合、 A を含む X の開集合 U で、 A へのレトラクションを持つものがあるとする。すなわち連続写像 $r : U \rightarrow A$ で $r|_A = \text{id}_A$ となるものがあるとする。 $\varphi : A \rightarrow Y$ を連続写像とすると $Z = Y \cup_\varphi X$ は、ハウスドルフ空間となることを示せ。

問題 6 - 6 . 空間対 (X, A) について、 A を閉集合とし、 X の A を含む開集合 U で、 A に X のホモトピーでレトラクトするものがあるとする。すなわち、ホモトピー $F_t : X \rightarrow X$ で、 $F_t(U) \subset U$, $F_t|_A = \text{id}_A$, $F_0 = \text{id}_X$, $F_1(U) \subset A$ となるものがあるとする。このとき、 $H_*(X, A) \cong H_*(Y \cup_\varphi X, Y)$ となることを示せ。