1　空間の分類

中学校、高等学校では、多角形、多面体、円、球面など基本的な図形の性質を学び、大学の１年次２年次では、空間の曲線、曲面等の取り扱い、また幾何学　（多様体入門）では、多くの興味深い空間を含む一般の多様体について学んだ。数学では、図形自身の性質をあつかうために、集合と位相の一般論も学んだ。

位相空間の分類においては、２つの位相空間の間に同相写像が存在すれば同じと考えるのが自然であり、多様体の分類においては、２つの多様体の間に微分同相写像が存在すれば同じと考えるのが自然である。これらの意味で同じであることを示すためには、同相写像あるいは微分同相写像を構成するか、構成できることを証明する必要がある。

一方、２つの空間がこのような意味で同じではないことを示すためにはどうすればよいであろうか。

注意 1.1　位相空間 X, Y が同相であるということは、

$$\exists\ \text{連続写像}\ f : X \longrightarrow Y, \exists\ \text{連続写像}\ g : Y \longrightarrow X,$$
$$(g \circ f = \mathrm{id}_X \ \text{かつ}\ f \circ g = \mathrm{id}_Y)$$

であるから、この命題の否定は、

$$\forall\ \text{連続写像}\ f : X \longrightarrow Y, \forall\ \text{連続写像}\ g : Y \longrightarrow X,$$
$$(g \circ f \neq \mathrm{id}_X \ \text{または}\ f \circ g \neq \mathrm{id}_Y)$$

である。しかし、これを文字どおりに確かめることは普通はできない。

次の５つの図形は、実際に同相ではないが、その理由は何であろうか。

- 整数全体に離散位相を入れた空間 $\boldsymbol{Z}$
- 実数直線 $\boldsymbol{R}$
- 円周 $S^1 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$
- カントール集合 C
- 平面 $\boldsymbol{R}^2$

ここで、カントール集合 C は、離散位相をもつ２点からなる集合 $\{0, 1\}$ の可算個の直積 $\{0, 1\}^{\boldsymbol{R}}$ に積位相を入れたものであり、いわゆる３進カントール集合 $\{\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0, 2\}\} \subset [0, 1]$ と同相である。

これらの空間の違いを列挙すると以下のようになる。

- 同相写像が存在するためには、全単射が存在する必要がある。集合の元の個数は $\boldsymbol{Z}$ とそれ以外とでは異なっている。従って、$\boldsymbol{Z}$ は上のそれ以外のものとは同相にならない。
- 位相空間の性質として、コンパクト性がある。円周 S^1, カントール集合 C はコンパクトであるが、そのほかはコンパクトではない。
- 位相空間の性質として、連結性がある。$\boldsymbol{Z}$ およびカントール集合は連結ではない。

ここまでの区別を表にまとめると次の表の最後の列を除いたものができる。

	元の個数（濃度）	コンパクト	連結	１点の補空間が連結
$\boldsymbol{Z}$	$\aleph^0$	×	×	×
$\boldsymbol{R}$	$\aleph^1$	×	○	×
円周 S^1	$\aleph^1$	○	○	○
カントール集合 C	$\aleph^1$	○	×	×
$\boldsymbol{R}^2$	$\aleph^1$	×	○	○

表の最後の列が見えなければ、実数直線 $\boldsymbol{R}$ と平面 $\boldsymbol{R}^2$ が区別できていない。そこで次のアイデアが使われる。

- １点を取り除いた空間の性質をみる。

こうすると、$\boldsymbol{R} \setminus \{$ １点 $\}$ は連結ではないが、$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{$ １点 $\}$ は連結であるので、実数直線 $\boldsymbol{R}$ と平面 $\boldsymbol{R}^2$ が区別できる。

さてそれでは、$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3, \dots$ はすべて同相ではないことがわかるだろうか。２次元以上のユークリッド空間では、１点を取り除いた空間は連結になるから、$\boldsymbol{R}$ と２次元以上のユークリッド空間が同相ではないことはわかるが、すぐにはそれ以上のことはわからない。しかし、「１点を取り除いた空間をみる」という考え方は正しく、実際には、１点を取り除いた空間の上の２点の結びかたの自由度を量ることによって区別されることになる。

注意 1.2　(1)　サードの定理 [多様体入門：定理 5.4.1] によれば、$m < n$ のときに微分可能な全射 $\boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ は存在しない。微分構造を考えれば、次元の違うユークリッド空間は微分同相ではないことがわかる。

(2)　連続な全射 $[0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ であるペアノ曲線の構成と同様に、連続な全射 $\boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が構成できる。

上で表に書いたことは何を意味しているだろうか。２つの空間を区別するためには、ある性質に注目して、その性質を持つかどうかをみるということが必要だということである。性質が成立するかしないかは、○×あるいは $\{0,1\}$ に値を持つ量ということである。様々な量をこれから問題にするが、整数あるいは実数に値を持つものが最も扱いやすい。このような、同じと考えるものの上で同じ値を持つ量を**不変量**という。２つの空間を区別するためには、不変量を定義して、それが異なることを示すことが必要である。

2　写像のホモトピー

2.1　連結性と弧状連結性

定義 2.1 (連結) 位相空間 X が連結であるとは、次のような空ではない開集合 U, V が存在しないことである。

$$U \cup V = X \text{ かつ } U \cap V = \emptyset$$

定義 2.2 (弧状連結) 位相空間 X が弧状連結とは、X の任意の２点 x_0, x_1 に対し、閉区間 $[0,1]$ から X への連続写像 $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ で $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ を満たすものが存在することである。

【問題 2.3】　位相空間 X が弧状連結ならば連結であることを示せ。解答例は 18 ページ。

注意 2.4　多様体は連結ならば弧状連結である。これは、局所弧状連結かつ連結ならば弧状連結であることから従う。

2.2　ホモトピー

弧状連結性を考えることは、次に述べる写像のホモトピーを位相空間 X が 1 点からなる集合 $\{p\}$ の時に考えることになっている。

定義 2.5 (ホモトピー) 位相空間 $X,\ Y$ に対し、連続写像 $f_0,\ f_1 : X \longrightarrow Y$ が**ホモトピック** *(homotopic)* とは, 連続写像 $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ で、$f_0(x) = F(0,x),\ f_1(x) = F(1,x)$ を満たすものが存在することである。$f_0,\ f_1$ がホモトピックであることを $f_0 \simeq f_1$ と表す。連続写像 F あるいは $f_t(x) = F(t,x)$ で定義される連続写像の族 f_t を f_0 と f_1 の間の**ホモトピー** *(homotopy)* と呼ぶ。

位相空間 X, Y に対し、$\mathrm{Map}(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体の集合とする。

$$\mathrm{Map}(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ は連続写像 }\}$$

集合 $\mathrm{Map}(X,Y)$ において、ホモトピックであること（$\simeq$）は同値関係となる。同値類をホモトピー類と呼び、ホモトピー類の集合 $\mathrm{Map}(X,Y)/\simeq$ を $[X,Y]$ と書き、ホモトピー集合と呼ぶ。

【問題 2.6】　連続写像 $f_0,\ f_1 : X \longrightarrow Y$ がホモトピックのとき、連続写像 $h : W \longrightarrow X,\ g : Y \longrightarrow Z$ に対し、$g \circ f_0 \circ h,\ g \circ f_1 \circ h : W \longrightarrow Z$ はホモトピックであることを示せ。解答例は 18 ページ。

【問題 2.7】　位相空間 X から Y への連続写像全体の集合 $\mathrm{Map}(X,Y)$ 上で $\simeq$ は同値関係となることを示せ。解答例は 18 ページ。

注意 2.8　前述の問題を含め、今後、問題の解答、定理の証明で、様々な写像の構成が必要になる。このときに便利なのが、次の補題である。今後特に注意しないが、写像を部分閉集合上で定義し、共通部分で両立するするようにすれば、この補題によって構成した写像は連続となる。

補題 2.9 $X,\ Y$ を位相空間とする。X が有限個の閉集合 $X_1,\ \ldots,\ X_k$ で被覆されているとし、X_i には、X の部分空間としての位相を考える：$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であることと、$i = 1, \ldots, k$ に対し、$f|X_i : X_i \longrightarrow Y$ が連続であることは同値である。

証明　$f : X \longrightarrow Y$ が連続ならば、Y の閉集合 A に対し $f^{-1}(A)$ は閉集合であり、$(f|X_i)^{-1}(A) = X_i \cap f^{-1}(A)$ は、X_i の位相の定義から、X_i の閉集合である。したがって、$f|X_i : X_i \longrightarrow Y$ は常に連続である。逆を考える。部分集合 $A \subset Y$ に対し、$X_i \cap f^{-1}(A) = (f|X_i)^{-1}(A)$ であり、

$$f^{-1}(A) = (\bigcup_{i=1}^{k} X_i) \cap f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{k} (X_i \cap f^{-1}(A)) = \bigcup_{i=1}^{k} (f|X_i)^{-1}(A)$$

である。$f|X_i : X_i \longrightarrow Y$ が連続であるとすると、閉集合 $A \subset Y$ に対し、$(f|X_i)^{-1}(A)$ は X_i の閉集合であり、$X_i \subset X$ は閉集合だから、$(f|X_i)^{-1}(A)$ は X の閉集合である。従って、$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{k} (f|X_i)^{-1}(A)$ は有限個の閉集合の和集合だから X の閉集合である。ゆえに f は連続である。 ■

【問題 2.10】　任意の空でない位相空間 X に対して, n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像のホモトピー集合 $[X, \boldsymbol{R}^n]$ は 1 点集合となることを示せ。

【解】　任意の $f : X \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ は $\mathbf{0}$ への定値写像 $c_{\mathbf{0}}$ とホモトピックである。実際、$F(t,x) = tf(x)$ とすればよい。

位相空間 X が弧状連結であることは, $\{p\}$ を１点からなる位相空間として $[\{p\}, X]$ が１点だけからなる集合であることを言っている。一般の位相空間 X に対して、$[\{p\}, X]$ は、X の弧状連結成分を元とする集合である。

【問題 2.11】 (1) 離散位相を持つ空でない有限集合 K について、X が弧状連結であることと $[K, X]$ が１点だけからなる集合であることは同値となることを示せ。

(2) n 次元の立方体 $I^n = [0, 1]^n$ と位相空間 X について、$[\{p\}, X]$ と $[I^n, X]$ との間の自然な全単射を定義せよ。解答例は 18 ページ。

非負整数 n に対し、$S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ を n 次元球面と呼ぶ。ホモトピー集合 $[S^n, X]$ は非常に面白い研究対象である。n 次元球面 S^n から位相空間 X への写像が定値写像とホモトピックであることは、次のように少し幾何的にとらえられる。n 次元 $(n \geqq 0)$ 球面 S^n を $n+1$ 次元円板 $D^{n+1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ の境界と考える：$S^n = \partial D^{n+1}$.

【問題 2.12】 位相空間 X への連続写像 $f : S^n \longrightarrow X$ に対し、連続写像 $g : D^{n+1} \longrightarrow X$ で、$g|S^n = f$ となるものが存在することと f がある定値写像とホモトピックであることは同値であることを示せ。

【解】 g が存在すれば、$F : [0, 1] \times S^n \longrightarrow X$ を $F(t, \boldsymbol{x}) = g(t\boldsymbol{x})$ とおくと、F は連続で、$F(0, \boldsymbol{x}) = c_{g(\mathbf{0})}(\boldsymbol{x})$, $F(1, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となる。 ここで、$c_{f(\mathbf{0})}$ は $f(\mathbf{0})$ への定値写像である。従って f は定値写像 $c_{g(\mathbf{0})}$ とホモトピックである。

逆に、連続写像 $F : [0, 1] \times S^n \longrightarrow X$ で、$b \in X$ に対し、$F(0, \boldsymbol{x}) = c_b(\boldsymbol{x})$, $F(1, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となるものがあるとする。写像 $g : D^{k+1} \longrightarrow X$ を $g(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} F(\|\boldsymbol{y}\|, \dfrac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}) & \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0} \\ \quad b & \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \end{cases}$ で定める。g が連続であることをみる。$g|(D^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$ は連続だから、b を含まない開集合 U に対して、$g^{-1}(U) = (g|(D^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}))^{-1}(U)$ は、$D^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ の開集合であり、D^{n+1} の開集合である。b を含む開集合 U をとると, $X \setminus U$ は閉集合である。従って、$F^{-1}(X \setminus U) \subset [0, 1] \times S^n$ は閉集合である。$[0, 1] \times S^n$ はコンパクトだから、$F^{-1}(X \setminus U)$ はコンパクトである。$f^{-1}(X \setminus U) = \{t\boldsymbol{x} \mid (t, \boldsymbol{x}) \in F^{-1}(X \setminus U)\}$ だから、$f^{-1}(X \setminus U)$ もコンパクトで、D^{n+1} はハウスドルフ空間だから、$f^{-1}(X \setminus U)$ は閉集合である。これにより、$g^{-1}(U) = D^{n+1} \setminus f^{-1}(X \setminus U)$ は開集合である。従って、g は連続である。

定義 2.13 (n 連結) 位相空間 X は, $0 \leqq m \leqq n$ に対して、$[S^m, X]$ が１点集合となるとき n 連結であると言われる。

問題 2.11 により、0 連結であることと弧状連結であることは同値である。例題 2.10 により、k 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^k$ は任意の n に対して n 連結である。

2.3 ホモトピー同値

位相空間 X, Y に対して、様々な空間との間の写像のホモトピー集合を比べることにより、空間が区別できるかどうかを考えてみよう。例えば、１点集合 $\{p\}$ と、n 次元立方体は、そのままではホモトピー集合を使って区別することはできない。なぜなら、任意の位相空間 X に対し、$[X, \{p\}]$ と $[X, I^n]$ はともに１点集合であるし、$[\{p\}, X]$ と $[I^n, X]$ はともに弧状連結成分の個数

の元を持つ集合である。次に定義する「同じホモトピー型をもつ」２つの空間は区別できないことが容易にわかる。

定義 2.14 (ホモトピー同値) 位相空間 X, Y に対して、連続写像 $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow X$ であって、$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y,\ g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ を満たすものがあるとき、X と Y は**同じホモトピー型を持つ**といい、$X \simeq Y$ と書く。X と Y は**ホモトピー同値** *(homotopy equivalent)* であるとも言う。f(または g) のことを**ホモトピー同値**（写像）*(homotopy equivalence)* と呼び、このとき g(または f) を f(または g) の**ホモトピー逆写像** *(homotopy inverse)* と呼ぶ。

【例 2.15】 (1)　同相な位相空間 X, Y はホモトピー同値である。

(2)　１点集合 $\{p\}$ と n 次元立方体、n 次元ユークリッド空間はホモトピー同値である。

(3)　n 次元ユークリッド空間から原点 $\mathbf{0}$ を除いた空間 $\boldsymbol{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ と $n-1$ 次元球面 S^{n-1} はホモトピー同値である。実際、写像 $h : \boldsymbol{R} \times S^{n-1} \longrightarrow \boldsymbol{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ を $h(t, \boldsymbol{x}) = e^t \boldsymbol{x}$ で定義すると、h は同相であり、(2) から S^{n-1} と $\boldsymbol{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ はホモトピー同値となる。

定義 2.16 (可縮) １点からなる位相空間とホモトピー同値な空間は可縮な空間と呼ばれる。

定義 2.17 (星型) n 次元ユークリッド空間の部分集合 A が次の性質 $(*)$ を持つ A 内の点 $\boldsymbol{y}$ を持つとき、A は（$\boldsymbol{y}$ に対し）星型であるという。

$(*)$ 任意の $\boldsymbol{x} \in A$ に対し、線分 $\ell_{\boldsymbol{x}} = \{(1-t)\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{x} \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ は A に含まれる。

n 次元ユークリッド空間の星型の部分空間 A は可縮である。実際、A が $\boldsymbol{y} \in A$ に対して星型として、$\boldsymbol{y} \in A$ への写像 $c_{\boldsymbol{y}} : \{p\} \longrightarrow A$, 写像 $c : A \longrightarrow \{p\}$ を考えると、$c \circ c_{\boldsymbol{y}} = \mathrm{id}_{\{p\}},\ c_{\boldsymbol{y}} \circ c \simeq \mathrm{id}_A$ となる。ホモトピー $F : [0,1] \times A \longrightarrow A$ は、$F(t, \boldsymbol{x}) = (1-t)\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{x}$ で与えられる。

【問題 2.18】　位相空間の間のホモトピー同値という関係 $\simeq$ は位相空間全体の上で同値関係であることを示せ（同値関係は集合の類に対しても定義される概念である）。解答例は 19 ページ。

【問題 2.19】　次の X, Y は同相ではないが、ホモトピー同値であることを示せ。

$$
\begin{aligned}
X = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 &\mid \left((x^2+y^2)^{1/2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\} \\
&\cup \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid y = 0, (x-2)^2 + z^2 \leqq 1\} \\
Y = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 &\mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\
&\cup \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid y = 0, (x-1)^2 + z^2 = 1\}
\end{aligned}
$$

解答例は 19 ページ。

ホモトピー同値な空間が同相ではないことを示すためには、$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 2)$ に対しては、１点を除いた空間を考えることが有効であった。$\boldsymbol{R}^2$ あるいは $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間と、他の空間が同相でないことを示すためには次のジョルダンの閉曲線定理が有効である。

定理 2.20 (ジョルダンの閉曲線定理) 平面上の単純閉曲線（円周の連続な単射による像）$\varGamma$ の補集合は *2* つの弧状連結成分 U, V をもち、$\varGamma = \overline{U} \setminus U$, $\varGamma = \overline{V} \setminus V$ となる。

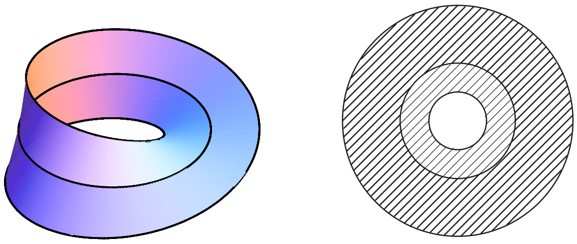


図 1: 問題 2.22 のメビウスの帯、アニュラス

【問題 2.21】　ジョルダンの閉曲線定理 2.20 を用いて、$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ は同相ではないことを示せ。

【解】　$\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ の中の円周 $C = \{(\cos\theta, \sin\theta, 0, \dots, 0) \mid \theta \in \boldsymbol{R}\}$ の補集合は弧状連結である。実際、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ について、$(x_3, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ ならば $\gamma_{\boldsymbol{x}}(t) = t\boldsymbol{x}$ $(t \in [0,1])$ が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{0}$ を結ぶ線分であり、$(x_3, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ ならば、$\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ として、

$$\gamma_{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{cases} 2t\boldsymbol{e}_3 & (t \in [0, \frac{1}{2}]) \\ (2t-1)\boldsymbol{x} + (2-2t)\boldsymbol{e}_3 & (t \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{0}$ を結ぶ区分線形曲線である。

もしも、$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ が同相であるとすると、同相写像 $h : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ による C の像 $h(C)$ について、上に述べたことから $\boldsymbol{R}^2 \setminus h(C)$ は弧状連結でなければならない。一方 $h(C)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の単純閉曲線であり、ジョルダンの閉曲線定理 2.20 により、$\boldsymbol{R}^2 \setminus h(C)$ は、弧状連結ではない。これは矛盾である。従って、$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ は同相ではない。

【問題 2.22】　(1)　開いたメビウスの帯、円周、開いたアニュラスはホモトピー同値であることを示せ。ここで、開いたメビウスの帯とは、

$$\{((2 + r\cos\theta)\cos 2\theta, (2 + r\cos\theta)\sin 2\theta, r\sin\theta) \mid r \in (-1, 1),\ \theta \in \boldsymbol{R}\} \subset \boldsymbol{R}^3$$

と同相な位相空間であり、開いたアニュラスとは

$$\{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \frac{1}{4} < {x_1}^2 + {x_2}^2 < 4\}$$

と同相な位相空間である。

(2)　ジョルダンの閉曲線定理を用いて, 開いたメビウスの帯と開いたアニュラスは同相ではないことを示せ。解答例は 19 ページ。

【問題 2.23】　(1)　$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ と $S^1 \times S^1 \setminus \{(0, 0)\}$ は同じホモトピー型を持つことを示せ。ただし、$(0, 0) \in S^1 \times S^1$ は、$S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ という座標に対して表示している。
(ヒント：ともに $S^1 \vee S^1$ と同じホモトピー型を持つことを示せ。$S^1 \vee S^1$ は２つの基点をもつ円周の基点を同一視して得られる空間である。)

(2)　ジョルダンの閉曲線定理を用いて、$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ と $S^1 \times S^1 \setminus \{(0, 0)\}$ は同相でないことを示せ。解答例は 19 ページ。

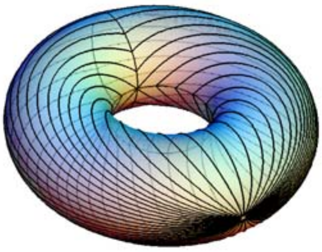


図 2: 問題 2.23 の $S^1 \times S^1 \setminus \{(0,0)\}$

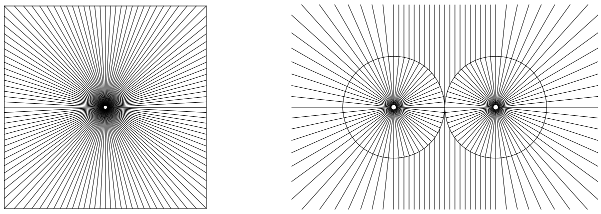


図 3: 問題 2.23 の $S^1 \times S^1 \setminus \{(0,0)\}$ を切り開いた $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{(0,0)\}$ と $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{\pm \boldsymbol{e}_1\}$

2.4 空間対、基点付きの空間

平面 $\boldsymbol{R}^2$ の 1 点 $\mathbf{0} = (0,0)$ の補空間 $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ および、2 点 $\{\pm \boldsymbol{e}_1\}$ ($\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$) の補空間 $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{\pm \boldsymbol{e}_1\}$ について、円周 S^1 からの写像のホモトピー集合 $[S^1, \boldsymbol{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}]$, $[S^1, \boldsymbol{R}^2 \setminus \{\pm \boldsymbol{e}_1\}]$ を考えるとこれらはともに可算無限集合になることがわかる。この 2 つの空間は、ホモトピー同値ではないことを後で示すが、そのために、写像のホモトピー集合に対して、群構造を導入することを考える。円周 S^1 からの 2 つの写像に対して円周 S^1 からの写像を与える演算を考える必要があるが、そのままでは難しいので、基点付きの空間の間の写像、空間対の間の写像を考える。

定義 2.24 (空間対，基点付き空間) 位相空間 X とその部分空間 A の対 (X, A) を**空間対**と呼ぶ。A が 1 点 $b \in X$ からなるとき、$(X, \{b\})$ を (X, b) と書き、**基点付き空間**と呼ぶ。

定義 2.25 (空間対の間の写像，そのホモトピー) 空間対 (X, A), (Y, B) に対して、連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ が $f(A) \subset B$ を満たすとき、f を空間対 (X, A), (Y, B) の間の連続写像と呼び、$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ と書く。空間対の間の連続写像 $f_0,\ f_1 : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ がホモトピックとは連続写像 $f_0,\ f_1$ の間のホモトピー $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ で $F([0,1] \times A) \subset B$ を満たすものが存在することである。$f_t(x) = F(t, x)$ で定義されるホモトピーは $f_t(A) \subset B$ を満たしている。空間対の間の連続写像 f_0 と f_1 がホモトピックであることも $f_0 \simeq f_1$ と書く。

上のホモトピー $F:[0,1]\times X \longrightarrow Y$ は、$[0,1]\times(X,A)=([0,1]\times X,[0,1]\times A)$ と考えて、$F:[0,1]\times(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ のように書かれる。

$\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ を空間対 (X,A), (Y,B) の間の連続写像全体のなす集合とすると、$\simeq$ は $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ 上の同値関係となる。その同値類をホモトピー類と呼び、同値類の集合 $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))/\simeq$ をホモトピー集合と呼び、$[(X,A),(Y,B)]$ と書く。

注意 2.26　一般に $x\in A$ に対して $f_t(x)=f_0(x)$ を満たすホモトピーを A についての**相対ホモトピー**と呼び、このようなホモトピーが存在するとき、$f_0\simeq f_1$ rel. A と書く。ホモトピー群を定義するときなどには空間対 (X,A) から基点付きの空間 (Y,b_Y) への写像を考えるが、このときのホモトピーは $f_t(A)=b_Y$ を満たしている。このときのホモトピーは、A についての相対ホモトピーであり、$f_0\simeq f_1$ rel. A のように書くことも多い。

空間対 (X,A), (Y,B) がホモトピー同値であることは、定義 2.14 と同様に、連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, $g:(Y,B)\longrightarrow(X,A)$ であって、$f\circ g\simeq \mathrm{id}_{(Y,B)}:(Y,B)\longrightarrow(Y,B)$, $g\circ f\simeq \mathrm{id}_{(X,A)}:(X,A)\longrightarrow(X,A)$ を満たすものがあることとして定義される。このとき、$(X,A)\simeq(Y,B)$ と書かれる。

【問題 2.27】　$B^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|\leqq 1\}$, $S^{n-1}=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$ とするとき、(B^n,S^{n-1}), $(\boldsymbol{R}^n,S^{n-1})$, $(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n\setminus B^n)$ はホモトピー同値であることを示せ。解答例は 20 ページ。

基点付きの空間 (X,b) が $(\{b\},b)$ とホモトピー同値になることは、$i:(\{b\},b)\longrightarrow(X,b)$, $r:(X,b)\longrightarrow(\{b\},b)$ について、$i\circ r\simeq \mathrm{id}_{(X,b)}$ となることである。$r\circ i=\mathrm{id}_{(\{b\},b)}$ は、常に成立しているからである。このとき、(X,b) は基点を保って可縮であると言われ、位相空間における星型の空間の位相空間における対応物と考えられる。

空間対 (X,A) が、(A,A) とホモトピー同値になることは、$i:(A,A)\longrightarrow(X,A)$, $r:(X,A)\longrightarrow(A,A)$ について、$r\circ i\simeq \mathrm{id}_A=\mathrm{id}_{(A,A)}$, $i\circ r\simeq\mathrm{id}_{(X,A)}$ となることである。実際に扱う空間では、特に、$r\circ i=\mathrm{id}_A=\mathrm{id}_{(A,A)}$, $i\circ r\simeq \mathrm{id}_{(X,A)}$ rel. A となることが多い。このとき、A は X の**変形レトラクト**であるという。$r\circ i=\mathrm{id}_A$ をみたす r は**レトラクション**と呼ばれ、レトラクション r があるとき、A は X の**レトラクト**であるという。

【例 2.28】　(1)　問題 2.22 の解における $f(S^1)$ はメビウスの帯 M の変形レトラクトであり、$i(S^1)$ はアニュラス A の変形レトラクトである。

(2)　S^n は $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, $D^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ の変形レトラクトである。

空間対 (X,A) から基点付き空間 (Y,b) への写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,b)$ を考えると、$f(A)=b$ となるから、X において、A に含まれる点は同値という同値関係 $\sim$ により得られる商空間 $X/\sim$ を考え、このような写像は $X/\sim$ からの写像と考えるとわかりやすいことも多い。この商空間 $X/\sim$ を、X において A を 1 点に縮めた空間と呼び、X/A と書く。X/A には自然な基点 A/A があり、基点付き空間 $(X/A,A/A)$ と考えることも多い。X/A には商位相を考えているから、A が X の閉集合のとき、$X\setminus A\longrightarrow X/A\setminus A/A$ は同相写像である。

【問題 2.29】　空間対 (X,A) から基点付き空間 (Y,b) への写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,b)$ について、A, $\{b\}$ は閉集合とし、f の制限 $f|(X\setminus A):X\setminus A\longrightarrow Y\setminus\{b\}$ は、開集合の間の同相写像とする。X がコンパクト空間、Y がハウスドルフ空間ならば、$\underline{f}:(X/A,A/A)\longrightarrow(Y,b)$ は同相写像であることを示せ。解答

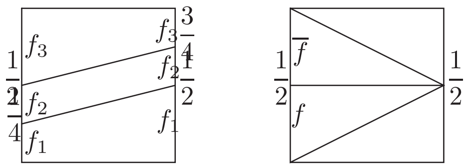


図 4: 問題 3.2：ホモトピー群の演算の結合律と逆元

例は、20 ページ。

【例 2.30】 例題 2.12 により、$(X, A) = ([0,1] \times S^n, \{0\} \times S^n)$ に対し、$(X/A, A/A) \approx (D^{n+1}, \mathbf{0})$ である。

【問題 2.31】 $[0,1]^n/\partial[0,1]^n \approx D^n/\partial D^n \approx S^n$ を示せ。解答例は、20 ページ。

3 ホモトピー群

3.1 ホモトピー群の定義

閉区間 $[0,1]$ を I で表す。n 次元立方体 $I^n = \overbrace{I \times \cdots \times I}^{n} = [0,1]^n$ の内部は開区間 $(0,1)$ の直積 $(0,1)^n$ であり、I^n の境界は $\partial I^n = [0,1]^n \setminus (0,1)^n$ である。

基点付きの位相空間 (X, b_X) に対し、空間対 $(I^n, \partial I^n)$ からの連続写像の全体 $\mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ を考える。

$f_1,\ f_2 \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、連続写像 $f_1 \natural f_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ を次で定義する。$(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (t_1, \boldsymbol{t}')$ とおく。

$$(f_1 \natural f_2)(t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} f_1(2t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in \bigl[0, \dfrac{1}{2}\bigr]) \\ f_2(2t_1 - 1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in \bigl[\dfrac{1}{2}, 1\bigr]) \end{cases}$$

空間対の写像のホモトピー類の集合 $[(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ を $\pi_n(X, b_X)$ と書く。$\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ の元の演算 $(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto \alpha_1\alpha_2$ を $\alpha_1 = [f_1]$, $\alpha_2 = [f_2]$ となる $f_1,\ f_2$ を使って、$\alpha_1\alpha_2 = [f_1 \natural f_2]$ で定義する。

次の問題 3.2 で確かめるように、$\pi_n(X, b_X)$ は、上の演算に関して群になる。

定義 3.1 基点付きの位相空間 (X, b_X) に対し、$\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ に $\natural$ から誘導される演算を考えたものを (X, b_X) の n 次元ホモトピー群と呼ぶ。1 次元ホモトピー群は基本群とも呼ばれる。

【問題 3.2】 (1) 上の演算が「適切に定義されている」(well defined) とはどういうことか。また演算が定義できていることを確かめよ。

(2) この演算について、結合律が成り立つことを示せ。図 4 の左図参照。

(3) b_X への定値写像を c_{b_X} とする。c_{b_X} のホモトピー類 $[c_{b_X}]$ が上の演算の単位元であることを示せ。

(4) $f \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$\overline{f}(t_1, \boldsymbol{t}') = f(1 - t_1, \boldsymbol{t}')$ とおくと、上の演算について、ホモトピー類 $[f]$ の逆元がホモトピー類 $[\overline{f}]$ で与えられることを示せ。図 4 の右図参照。解答例は、21 ページ。

【問題 3.3】 次を示せ。

(1)　基点付き位相空間の間の連続写像 $f:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ に対して、$\alpha\in\mathrm{Map}((I^n,\partial I^n),(X,b_X))$ に $f\circ\alpha\in\mathrm{Map}((I^n,\partial I^n),(Y,b_Y))$ を対応させる写像は、群の準同型 $f_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow\pi_n(Y,b_Y)$ を誘導することを示せ。

(2)　連続写像 $f:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$, $g:(Y,b_Y)\longrightarrow(Z,b_Z)$ に対して、群の準同型として $g_*f_*=(g\circ f)_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow\pi_n(Z,b_Z)$ であることを示せ。

【解】　(1)　まず、f_* が写像になることは、$\alpha_0\simeq\alpha_1:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ がホモトピックな写像のとき、そのホモトピーを $H:[0,1]\times(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ とすると、$f\circ H$ が $f\circ\alpha_0\simeq f\circ\alpha_1$ を与えることからわかる。

また、$\alpha,\ \beta:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ に対し、$f\circ(\alpha\natural\beta)=(f\circ\alpha)\natural(f\circ\beta)$, $f\circ\overline{\alpha}=\overline{f\circ\alpha}$ であるから、$f_*([\alpha][\beta])=f_*(\alpha)f_*(\beta)$, $f_*([\alpha]^{-1})=(f_*(\alpha))^{-1}$ であり、準同型となる。

(2)　$\alpha:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ に対し、$(g\circ f)_*([\alpha])=[(g\circ f)\circ\alpha]=[g\circ(f\circ\alpha)]=g_*([f\circ\alpha])=g_*(f_*([\alpha]))=(g_*\circ f_*)([\alpha])$

【問題 3.4】　基点を保つ連続写像 $f_0,\ f_1:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ が（基点を保って）ホモトピックとすると、$(f_0)_*=(f_1)_*:\pi_n(X,b_X)\longrightarrow\pi_n(Y,b_Y)$ である。

【解】　$f_0\simeq f_1:(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ を与えるホモトピーを $F:[0,1]\times(X,b_X)\longrightarrow(Y,b_Y)$ とすると、$\alpha:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ に対し、$F\circ\alpha$ は、$f_0\circ\alpha,\ f_1\circ\alpha:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ の間のホモトピーとなる。従って、$(f_0)_*([\alpha])=(f_1)_*([\alpha])$ が任意の $[\alpha]\in\pi_n(X,b_X)$ に対していえる。よって、$(f_0)_*=(f_1)_*$.

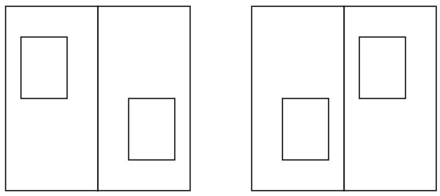
【問題 3.5】　(X,b_X), (Y,b_Y) を弧状連結な基点付き空間とする。$\pi_n(X\times Y,(b_X,b_Y))\cong\pi_n(X,b_X)\times\pi_n(Y,b_Y)$ を示せ。
ヒント：射影 $\mathrm{pr}_X:(X\times Y,(b_X,b_Y))\longrightarrow(X,b_X)$, $\mathrm{pr}_Y:(X\times Y,(b_X,b_Y))\longrightarrow(Y,b_Y)$ を用いる。解答例は、21 ページ。

【問題 3.6】　$n\geqq 2$ に対して、$\pi_n(X,b_X)$ は可換群であることを示せ。
ヒント：単位立方体に含まれる直方体 $K=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subset[0,1]^n$ $(0\leqq a_i<b_i\leqq 1,\ i=1,\ldots,n)$ に対し、$f_K:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b_X)$ を,

$$f_K(\boldsymbol{t})=\begin{cases} f(\dfrac{t_1-a_1}{b_1-a_1},\ldots,\dfrac{t_n-a_n}{b_n-a_n}) & (\boldsymbol{t}\in K)\\ b_X & (\boldsymbol{t}\in I^n\setminus K)\end{cases}$$

を考える。f_K は K の位置に依らず f とホモトピックである。$f_1,f_2:(I^n,\partial I^n)\longrightarrow(X,b)$ と内部が交わらない 2 つの直方体 K_1, K_2 に対し、K_1 上で $(f_1)_{K_1}$, K_2 上で $(f_2)_{K_2}$, $I^n\setminus(K_1\cup K_2)$ を b に写す写像 F_{K_1,K_2} が考えられ、$n\geqq 2$ のときは、K_1, K_2 の位置に依らず、互いにホモトピックであることが示される。解答例は、22 ページ。

問題 3.6 により、$n\geqq 2$ に対して、$\pi_n(X,b_X)$ は可換群であることはわかるが、その計算は n が大きいときに非常に難しい。$n\geqq 2$ に対して球面 S^n に対して、$\pi_m(S^n,b_{S^n})=0$ $(1\leqq m\leqq n-1)$, $\pi_n(S^n,b_{S^n})=\boldsymbol{Z}$ は後で説明するが、$\pi_m(S^n,b_{S^n})$ $(m>n)$ は多くの m に対して 0 ではなく、完全には決定されていない。



$(f_1)_{K_1}\natural(f_2)_{K_2}$ $(f_2)_{K_2}\natural(f_1)_{K_1}$

図 5: $\pi_n(X,b)$ $(n>1)$ は可換である（問題 3.6）

3.2 ホモトピー群の関手性

明らかに, 恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X,b_X) \longrightarrow (X,b_X)$ に対しては、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_n(X,b_X)}$ である。これと、問題 3.3 でみた性質は、n 次元ホモトピー群が基点付き位相空間の同相類の不変量となることを意味している。

もう一度まとめると、基点付き位相空間の n 次元ホモトピー群は、基点付き位相空間の間の連続写像について次の性質を持つ。

- 基点付き位相空間の間の連続写像 $f:(X,b_X) \longrightarrow (Y,b_Y)$ は群の準同型 $f_* : \pi_n(X,b_X) \longrightarrow \pi_n(Y,b_Y)$ を誘導する。
- 恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X,b_X) \longrightarrow (X,b_X)$ に対しては、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_n(X,b_X)}$ である。
- 連続写像 $f:(X,b_X) \longrightarrow (Y,b_Y)$, $g:(Y,b_Y) \longrightarrow (Z,b_Z)$ に対して、群の準同型として $g_*f_* = (g\circ f)_* : \pi_n(X,b_X) \longrightarrow \pi_n(Z,b_Z)$ である。

この性質を、n 次元ホモトピー群をとる操作は、

(基点付き位相空間, (基点を保つ）連続写像)

のなす圏（カテゴリー）から

(群, 準同型写像)

のなす圏への**共変関手**（コバリアント・ファンクター）であるという。基点付きの位相空間が (X,b_X), (Y,b_Y) が同相ならば、それらの n 次元ホモトピー群 $\pi_n(X,b_X)$, $\pi_n(Y,b_Y)$ は同型である。従って、$\pi_n(X,b_X)$ の同型類が、基点付き位相空間の同相類の不変量となる。

基点付き位相空間の間の連続写像が、n 次元ホモトピー群の間に誘導する準同型については、もう 1 つ重要な性質がある。それは例題 3.4 で確かめた**ホモトピー不変性**と呼ばれる性質である。

- 基点を保つ連続写像 f_0, $f_1 : (X,b_X) \longrightarrow (Y,b_Y)$ が（基点を保って）ホモトピックとすると、$(f_0)_* = (f_1)_* : \pi_n(X,b_X) \longrightarrow \pi_n(Y,b_Y)$ である。

従って、n 次元ホモトピー群は基点を保つホモトピー型の不変量である。

さらに、X が弧状連結な位相空間であれば、$\pi_n(X,b_X)$ の同型類は基点 b_X の取り方によらないことがわかる。

【問題 3.7】 弧状連結な位相空間 X に対し、$\pi_n(X,b_X)$ の同型類は、基点 b_X のとりかたによらないことを示せ。解答例は、22 ページ。

【問題 3.8】 弧状連結な位相空間 X に対し、$\pi_1(X,b_X)$ の共役類の集合 C からホモトピー集合 $[S^1,X]$ への写像を自然に定めるとこれは全単射であることを示せ。解答例は、24 ページ。

3.3　n 連結性

空間対 $(I^n, \partial I^n)$ と空間対 (B^n, S^{n-1}) は同相である。実際 $(I^n, \partial I^n) = ([0,1]^n, \partial([0,1]^n))$ と $([-1,1]^n, \partial([-1,1]^n))$ はアフィン写像 $\boldsymbol{x} \longmapsto 2\boldsymbol{x} - (1,\dots,1)$ により同相であり、$([-1,1]^n, \partial([-1,1]^n))$ と (B^n, S^{n-1}) は写像 $\boldsymbol{x} \mapsto \begin{cases} \max\{|x_i|\}\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} & (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}) \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}) \end{cases}$ により同相である。従って、集合として、$\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ と集合 $[(B^n, S^{n-1}), (X, b_X)]$ の間には全単射が存在する。空間対 (B^n, S^{n-1}) と基点付き空間 (S^n, b_{S^n}) は、ホモトピー同値ではないが、これらから、基点付き空間 (X, b_X) への写像の間には、全単射が存在する。これは、B^n の部分集合 S^{n-1} を１点に同一視して得られる空間 B^n/S^{n-1} について、$(B^n/S^{n-1}, S^{n-1}/S^{n-1})$ が (S^n, b_{S^n}) と同相になるからである。

【問題 3.9】　集合として $[(S^n, b_{S^n}), (X, b_X)] = \pi_n(X, b_X)$ を示せ。解答例は、24 ページ。

【問題 3.10】　n を正の整数とする。$D^{n+1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$, $S^n = \partial D^{n+1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とする。弧状連結な空間 X とその上の点 b_X を考える。「$\pi_n(X, b_X)$ が単位群であること」と「任意の写像 $f : S^n \longrightarrow X$ に対し、$g : D^{n+1} \longrightarrow X$ で $g|\partial D^{n+1} = f$ を満たすものが存在すること」は同値であることを示せ。
ヒント：例題 2.12，問題 3.7，問題 3.9 を使う。解答例は、24 ページ。

【問題 3.11】　n 次元立方体 I^n から m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U への連続写像 $f : I^n \longrightarrow U$ を考える。この f に対し、ある実数 ε が存在し、$g : I^n \longrightarrow U$ が $\displaystyle\sup_{\boldsymbol{t} \in I^n} \|g(\boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{t})\| < \varepsilon$ を満たす連続写像ならば、$s \in [0,1]$ に対し、$(1-s)g(\boldsymbol{t}) + sf(\boldsymbol{t}) \in U$ となることを示せ。解答例は、25 ページ。

【問題 3.12】　n 次元立方体 I^n について、その境界を ∂I^n とする。m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U とその上の点 $b \in U$ について、写像 $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ を考える。$f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな滑らかな写像 $g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$, $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな区分線形な写像 $\overline{f} : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ が存在することを示せ。ただし、区分線形な写像とは、I^n を適当に内部が交わらない n 単体（$n+1$ 点の凸包）に分割したとき、各単体の上では１次写像（アフィン写像）であるような連続写像のことである。解答例は、25 ページ。

【問題 3.13】　(S^n, b_{S^n}) と $(\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{0\}, b_{S^n})$ は、ホモトピー同値であることに注意して、$k < n$ ならば、$\pi_k(S^n, b_{S^n}) \cong 0$ であることを示せ。解答例は、25 ページ。

【問題 3.14】　$U \subset \boldsymbol{R}^n$ を弧状連結な開集合とする。$b \in U$ を U の基点, $p \in U$ を b と異なる点とする。$k < n-1$ ならば、包含写像 $i : U \setminus \{p\} \longrightarrow U$ は同型写像 $i_* : \pi_k(U \setminus \{p\}, b) \longrightarrow \pi_k(U \setminus \{p\}, b)$ を誘導することを示せ。解答例は、25 ページ。

4　基本群

基点付きの空間 (X, b) の基本群を記述することを考えよう。まず、$\pi_1(S^1, b_{S^1}) = \pi_1(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}, 0) \cong \boldsymbol{Z}$ を示す。

4.1　円周の基本群

円周 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ について、射影を $p:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ とおく。

第１段. まず、２つの連続関数 $\widetilde{f}_1,\ \widetilde{f}_2:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ が、$p\circ\widetilde{f}_1=p\circ\widetilde{f}_2$ を満たすならば、ある整数 n があって、$\widetilde{f}_1(x)=\widetilde{f}_2(x)+n$ となることを示す。実際、$p\circ(\widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2)=p\circ\widetilde{f}_1-p\circ\widetilde{f}_2=0$ だから、$\widetilde{f}_1(x)-\widetilde{f}_2(x)\in\boldsymbol{Z}$ であるが、$\widetilde{f}_1-\widetilde{f}_2$ は連続であるから、$[0,1]$ 上で定数である。従って、ある整数 n があって、$\widetilde{f}_1(x)=\widetilde{f}_2(x)+n$ となる。

第２段. 閉区間 $[0,1]$ から円周への連続写像 $f:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、連続写像 $\widetilde{f}:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で $p\circ\widetilde{f}=f$ を満たすものがあることは直感的には明らかに思われるが、証明は次のように行われる。

(1). 円周を次の３個の開区間で被覆する。

$$V_0=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\ \bmod\ 1,\quad V_1=(0,\frac{2}{3})\ \bmod\ 1,\quad V_2=(-\frac{2}{3},0)\ \bmod\ 1$$

このとき、ある正実数 δ に対し、定義域 $[0,1]$ の各点 x の δ 近傍 $B_x(\delta)$ の像 $f(B_x(\delta))$ は、$V_0,\,V_1,\,V_2$ のどれかに含まれる。実際、定義域 $[0,1]$ の開被覆 $U_i=f^{-1}(V_i)$ を考え、$[0,1]$ 上の３つの関数 $g_i(x)=\mathrm{dist}(x,[0,1]\setminus U_i)$ $(i=1,$ $2,\,3)$ を考える。これらは負にならない連続関数で、$U_1\cup U_2\cup U_3=[0,1]$ だから、$\max\{g_1,g_2,g_3\}>0$ である。$\max\{g_1,g_2,g_3\}$ も連続関数であり、その最小値を δ と置く。$x\in[0,1]$ において、ある i については、$g_i(x)\geqq\delta$ であるが、それは、$B_x(\delta)\subset U_i$ を意味する。

(2). (1) で得られる δ に対し、$\dfrac{1}{N}<\delta$ となる自然数 N をとり、$[0,1]$ 区間を N 等分すると、各区間 $[\dfrac{m-1}{N},\dfrac{m}{N}]$ $(m=1,\ \ldots,\ N)$ に対し、$\widetilde{f}_m:[\dfrac{m-1}{N},\dfrac{m}{N}]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f}_m=f\big|_{[\frac{m-1}{N},\frac{m}{N}]}$ を満たすものが存在する。実際、$f([\dfrac{m-1}{N},\dfrac{m}{N}])\subset V_i$ となる i が存在するから、V_0 に値を持てば、$(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$ への写像、V_1 に値を持てば、$(0,\dfrac{2}{3})$ への写像、V_3 に値を持てば、$(-\dfrac{2}{3},0)$ への連続写像 $\widetilde{f}_m$ で $p\circ\widetilde{f}_m=f\big|_{[\frac{m-1}{N},\frac{m}{N}]}$ を満たすものが（i を決めれば一意に）存在する。

(3). 求める $\widetilde{f}$ を構成は、$\widetilde{f}_m$ の定義が一致していない $\dfrac{m}{N}$ 上で、順に補正していくことにより行われる。$\widetilde{f}\big|_{[0,\frac{1}{N}]}=\widetilde{f}_1$ とおき、$\widetilde{f}\big|_{[0,\frac{m-1}{N}]}$ が定義されているとする。$p\circ(\widetilde{f}(\dfrac{m-1}{N})-\widetilde{f}_m(\dfrac{m-1}{N}))=0$ だから、$n_m\in\boldsymbol{Z}$ で、$\widetilde{f}(\dfrac{m-1}{N})-\widetilde{f}_m(\dfrac{m-1}{N})=n_m$ を満たすものがある。そこで、$\widetilde{f}\big|_{[\frac{m-1}{N},\frac{m}{N}]}=\widetilde{f}_m+n_m$ とおくと、$\widetilde{f}\big|_{[0,\frac{m}{N}]}$ が連続写像として定義される。従って、帰納法により $\widetilde{f}:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{R}$ が定義された。

第３段. 正方形 $[0,1]^2$ から円周への連続写像 $F:[0,1]^2\longrightarrow\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、連続写像 $\widetilde{F}:[0,1]^2\longrightarrow\boldsymbol{R}$ で $p\circ\widetilde{F}=F$ を満たすものがあることも同様の考え方で示される。

(1). まず、ある正実数 δ に対し、定義域 $[0,1]^2$ の各点 x の δ 近傍 $B_x(\delta)$ の像 $F(B_x(\delta))$ は、$V_0,\,V_1,\,V_2$ のどれかに含まれる。証明は上の (1) と全く同じである。

(2). (1) で得られる δ に対し、$\dfrac{1}{N}<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$ となる自然数 N をとり、正方形を $[0,1]^2$ を１辺の長さが $\dfrac{1}{N}$ の正方形に N^2 等分する。このとき、各小正方形 $K_{m_1m_2}=[\dfrac{m_1-1}{N},\dfrac{m_1}{N}]\times[\dfrac{m_2-1}{N},\dfrac{m_2}{N}]$ 上の関数 $\widetilde{F}_{m_1m_2}$ で, $p\circ\widetilde{F}_{m_1m_2}=F\big|_{K_{m_1m_2}}$ を満たすものが定まる。

(3). m_1m_2 の辞書式順序に従って、$\widetilde{F}\big|_{K_{11}} = F_{11}$ とし、$\widetilde{F}\big|_{\bigcup_{k_1k_2<m_1m_2} K_{k_1k_2}}$ が定まっているときに、$\widetilde{F}\big|_{K_{m_1m_2}}$ を $\widetilde{F}_{m_1m_2}+n_{m_1m_2}$ ($n_{m_1m_2} \in \boldsymbol{Z}$) の形で作る。このときに、小正方形 $K_{m_1m_2}$ と $\bigcup_{k_1k_2\leqq m_1m_2} K_{k_1k_2}$ の共通部分は、１つの辺または、隣り合った２つの辺で連結であるから、その上で $\widetilde{F}\big|_{\bigcup_{k_1k_2<m_1m_2} K_{k_1k_2}} - \widetilde{F}_{m_1m_2}$ の値は一定値 $n_{m_1m_2} \in \boldsymbol{Z}$ となる。

第４段. $S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に対し、$b_{S^1} = 0 \mod 1$ とする。
連続関数 $f : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1, b_{S^1})$ に対し、連続写像 $\widetilde{f} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f} = f$ かつ $\widetilde{f}(0) = 0$ となるものをとることができる。$h(f) = \widetilde{f}(1)$ とおくと $h(f) \in \boldsymbol{Z}$ である。写像 $h : \mathrm{Map}(([0,1],\{0,1\}),(S^1,b_{S^1})) \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ について、$f_1 \simeq f_2 : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1,b_{S^1})$ ならば $h(f_1) = h(f_2)$ である. 実際、第３段により、f_1 と f_2 の間のホモトピー $F : [0,1]\times([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1,b_{S^1})$ に対し、連続写像 $\widetilde{F} : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{F} = F$ を満たすものが存在する。このとき、$\widetilde{F}(s,0) \in \boldsymbol{Z}$ は定数 n で、$\widetilde{F}-n$ を改めて、$\widetilde{F}$ と考えれば、$\widetilde{F}(s,0) = 0$ ととることができる。このとき、$\widetilde{F}(s,1) \in \boldsymbol{Z}$ も定数であり、$h(f_1) = \widetilde{F}(0,1)$, $h(f_2) = \widetilde{F}(1,1)$ であるから、$h(f_1) = h(f_2)$ となる。

第５段. 上の h により写像 $\varphi : \pi_1(S^1,b_{S^1}) = [([0,1],\{0,1\}),(S^1,b_{S^1})] \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ が定義される。φ は準同型写像である。実際、$f_i : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1,b_{S^1})$ ($i = 1,\ 2$) に対して、連続写像 $\widetilde{f_i} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f_i} = f_i$, かつ $\widetilde{f_i}(0) = 0$ となるものをとったとき、$\widetilde{f_1\natural f_2} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は $\widetilde{f_1\natural f_2}(t) = \begin{cases} \widetilde{f}_1(2t) & (t \in [0,\dfrac{1}{2}]) \\ \widetilde{f}_2(2t-1)+\widetilde{f}_1(1) & (t \in [\dfrac{1}{2},1]) \end{cases}$ で定義される。従って、$h(f_1\natural f_2) = h(f_1)+h(f_2)$ であり、$\varphi([f_1][f_2]) = \varphi([f_1])+\varphi([f_2])$ が示される。$f : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1,b_{S^1})$ に対して、$\overline{f}(x) = f(1-x)$ で定義される $\overline{f} : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1,b_{S^1})$ を考えると、連続写像 $\widetilde{f} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p\circ\widetilde{f} = f$, かつ $\widetilde{f}(0) = 0$ をみたすものに対し、$\widetilde{\overline{f}}(t) = \widetilde{f}(1-t) - \widetilde{f}(1)$ が、$p\circ\widetilde{\overline{f}} = \overline{f}$ かつ $\widetilde{\overline{f}}(0) = 0$ をみたすことがわかる。従って、$h(\overline{f}) = -h(f)$ であり、$\varphi([f]^{-1}) = -\varphi([f])$ がわかる。

第６段. φ は同型写像である。まず全射であることは、$k \in \boldsymbol{Z}$ に対し、$\widetilde{f}_k = kx$ により、$\widetilde{f}_k : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を定義すると、$\varphi(p\circ\widetilde{f}_k) = k$ となることからわかる。単射であることは次のようにしてわかる。$f : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1,b_{S^1})$ に対し $\varphi(f) = 0$ とする。このとき、$f = p\circ\widetilde{f}$, $\widetilde{f}(0) = 0$, $\widetilde{f}(1) = 0$ となる $\widetilde{f} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が存在する。$F(t,x) = p(t\widetilde{f}(x))$ とおくと、$F(t,0) = F(t,1) = b_{S^1}$ であり、$F(0,x) = b_{S^1}$, $F(1,x) = f(x)$ となるから、F は $c_{b_S^1}$, $f : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (S^1,b_{S^1})$ の間のホモトピーを与える。従って、$[f]$ は $\pi_1(S^1,b_{S^1})$ の単位元である。

以上で、$\pi_1(S^1,b_{S^1}) \cong \boldsymbol{Z}$ が示された。

円周の基本群が $\boldsymbol{Z}$ と同型であることからわかることがいろいろとある。

【問題 4.1】 $T^n = S^1\times\cdots\times S^1$ (n 個の直積) に対し、$\pi_1(T^n,b_{T^n})$ を求めよ。解答例は、26 ページ。

【問題 4.2】 $D^2 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$, $S^1 = \partial D^2 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, 基点を $b = (1,0)$ とし，包含写像を $i : (S^1,b) \longrightarrow (D^2,b)$ とする。$i_* : \pi_1(S^1,b) \longrightarrow \pi_1(D^2,b)$ を考えて，連続写像 $f : D^2 \longrightarrow S^1$ で、$f\circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ となるものが存在しないことを示せ。解答例は、26 ページ。

【問題 4.3】 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ と 3 次元以上のユークリッド空間

$\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ は同相ではないことを示せ。解答例は、26 ページ。

円周の基本群が $\boldsymbol{Z}$ と同型であることの証明の第 2 段、第 3 段に用いた δ は、コンパクト距離空間の開被覆のルベーグ数と呼ばれ、今後もしばしば登場する。

【問題 4.4】 (1) 距離空間 X の部分集合 A に対し、X 上の関数 $d_A(x)$ を $d_A(x) = \inf_{a \in A} \mathrm{dist}(x, a)$ で定義する。$d_A : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は連続であることを示せ。

(2) X 上の実数値連続関数 $f_1, \ldots, f_k$ に対し、$F(x) = \max_k f_k(x)$ で定義される関数 $F : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は連続であることを示せ。

(3) コンパクト距離空間 X 上の有限開被覆 $\{U_1, \ldots, U_k\}$ に対し、次を満たす正実数 δ が存在することを示せ。(δ をルベーグ数と呼ぶ。)

- すべての点 $x \in X$ の δ 近傍 $B_x(\delta)$ は、ある開集合 U_j $(j \in \{1, \ldots, k\})$ に含まれる。

解答例は、26 ページ。

4.2 群の表示

群を生成元と関係式で表示する方法を説明しよう。

群 G は、集合 G で、演算 $G \times G \longrightarrow G$ が指定され、それが、結合律を満たし、単位元 $\mathbf{1}$、各元 g の逆元 g^{-1} が存在するというものである。群 G の部分集合 S が、任意の G の元は S の元とその逆元の積で書かれるという性質をもつとき、S を生成元の集合と呼ぶ。このとき、G の元は S の元をアルファベットとする語（S の元の語（ワード））で表されるという。2 つの S の元の語 w_1, w_2 の積は、語を並べた語 $w_1 w_2$ で表される。2 つの語がいつ等しいか、すなわち、G の同じ元を表すかを表せば、群が表示できることになる。$w = s_1 \cdots s_k$ $(s_i \in S,\ i = 1, \ldots, k)$ に対して、$w^{-1} = {s_k}^{-1} \cdots {s_1}^{-1}$ とすると、$w_1 = w_2$ という関係式は、$w_1 {w_2}^{-1} = \mathbf{1}$ と書かれるから、どのような語が、$\mathbf{1}$ を表すかを指定すればよい。$\mathbf{1}$ を表す語の逆の語、2 つの語の積や、共役の語は、$\mathbf{1}$ を表すから、このことを勘案して、できるだけ少ない関係式、すなわち、$\mathbf{1}$ を表すアルファベットを与えて、群を表示することを考える。このとき、自明な関係式 $s_i {s_i}^{-1} = {s_i}^{-1} s_i = \mathbf{1}$ は、明示しなくても成立していると考える。

例えば、S が 1 つの元 a からなり、関係式が自明なものしかないときには、群の元は $\mathbf{1} = a^0$, $k \in \boldsymbol{Z}_{>0}$ に対して、$a^k = \overbrace{a \cdots a}^{k}$, $a^{-k} = (a^k)^{-1}$ からなり、$a^j a^k = a^{j+k}$ という計算法則を持つから、無限巡回群 $\boldsymbol{Z}$ と同型な群を表す。

S が k 個の元 $s_1, \ldots, s_k$ からなり、関係式が自明なものしかないときには、群の元は、$\mathbf{1}$ または ${s_{i_1}}^{e_1} \cdots {s_{i_j}}^{e_j}$ で $e_\ell = \pm 1$ $(\ell = 1, \ldots, j)$ であり、隣り合うアルファベットについて $s_{i_\ell} = s_{i_{j+\ell}}$ かつ $e_\ell + e_{\ell+1} = 0$ となる ℓ がないという語の全体となる。これらを簡約された語と呼ぶ。2 つの簡約された語の積は、それらを並べて、自明な関係式で簡約したものとなる。この群を k 元生成自由群と呼ぶ。

群 G の生成元の集合を S とし、$\mathbf{1}$ を表す関係式が、S の元の語の集合 R から、逆、積、共役を取ることで得られるとする。k 元生成自由群と同様に定義される S の元で生成される自由群を F_S と書くと、R は F_S の部分集合であるが、N_R を R を含む F_S の正規部分群で最小のものとする。このとき、G は商の群 F_S/N_R と同型となる。商の群 F_S/N_R を $\langle S \mid R \rangle$ と書く。

例えば、$\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z} = \langle a \mid a^3 \rangle$, $\boldsymbol{Z}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ と書かれる。

定義 4.5 (自由積，融合積) 2つの群 G_1, G_2 に対し、G_1 と G_2 の自由積 $G_1 * G_2$ は、$G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ とするとき、

$$G_1 * G_2 = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$$

で表される群である。

群 G_{12} からの準同型 $i_1 : G_{12} \longrightarrow G_1$, $i_2 : G_{12} \longrightarrow G_2$ が与えられたとき、融合積 $G_1 \underset{G_{12}}{*} G_2$ は、

$$G_1 \underset{G_{12}}{*} G_2 = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle \sqcup \{i_1(g_{12})\big(i_2(g_{12})\big)^{-1} \mid g_{12} \in G_{12}\}\rangle$$

で表される群である。

例えば 2 元生成自由群は $\langle a, b \rangle = \boldsymbol{Z} * \boldsymbol{Z}$ である。$G = \langle S \mid R \rangle$ に対し、S, R の元で生成される自由群 F_S, F_R に対して、$i_1 : F_R \longrightarrow F_S$ を包含写像から誘導される準同型, $i_2 : F_R \longrightarrow \{\mathbf{1}\}$ を自明な準同型とするとき、$G = \langle S \mid R \rangle = F_S \underset{F_R}{*} \{\mathbf{1}\}$ である。

4.3 ファンカンペンの定理

定理 4.6 位相空間 X が 2 つの開集合 U_1, U_2 で被覆されているとする：$X = U_1 \cup U_2$。$U_1, U_2, U_{12} = U_1 \cap U_2$ は弧状連結と仮定する。基点 $b \in U_{12} = U_1 \cap U_2$ をとり、包含写像を $i_1 : U_{12} \longrightarrow U_1$, $i_2 : U_{12} \longrightarrow U_2$ とし、これにより誘導される準同型写像を $i_{1*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b)$, $i_{2*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_2, b)$ とする。このとき、$\pi_1(X, b)$ は次の融合積で表される。

$$\pi_1(X, b) \cong \pi_1(U_1, b) \underset{\pi_1(U_{12}, b)}{*} \pi_1(U_2, b)$$

ファンカンペンの定理により、多くの図形の基本群を表示することが出来る。表示された群の性質を知ることは、通常非常に難しい。実際、表示された群が、自明な群であるかどうかをすべての有限表示群に対して検証するアルゴリズムは存在しないことが知られている。また、すべての有限表示群の元の表示に対して、それが単位元を表すかどうかを検証するアルゴリズムも存在しないことも知られている。

【例 4.7】 $S^1 \vee S^1$ を 2 つの (S^1, b_{S^1}) の b_{S^1} を 1 点 b に同一視した空間とする。$S^1 \vee S^1$ の 2 つの (S^1, b_{S^1}) の近傍を U_1, U_2 とし、$U_1 \cap U_2$ が十文字の形と同相となるものがとれる。このとき、$\pi_1(U_1 \cap U_2, b) = \{\mathbf{1}\}$ であり、$\pi_1(U_i, b) \cong \pi_1(S^1, b_{S^1}) \cong \boldsymbol{Z}$ $(i = 1, 2)$ となる。$\pi_1(S^1 \vee S^1, b) \cong \pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b) \cong \boldsymbol{Z} * \boldsymbol{Z}$ となる。

【問題 4.8】 2 次元トーラス

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid \big((x^2 + y^2)^{1/2} - 2\big)^2 + z^2 = 1\}$$

の基本群を、U_1 を

$$\begin{aligned} X = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid y = 0, (x+2)^2 + z^2 = 1\} \\ \cup\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

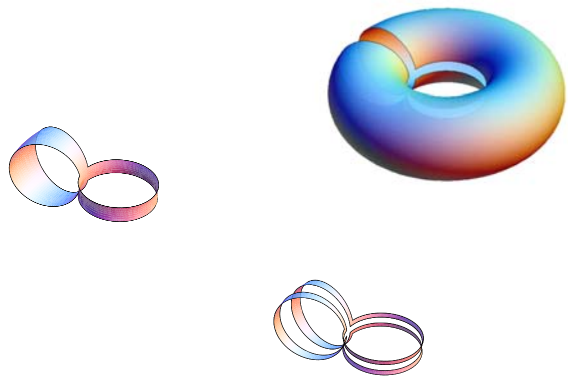


図 6: 例題 4.8 の U_1（左）, U_2（右上）と U_{12}（下）

の ε 近傍 $(\varepsilon < 0.1)$、$U_2 = T^2 \setminus X$ として、被覆 $T^2 = U_1 \cup U_2$ を用いて求めよ。図 6 参照。

【解】　基点 b を $U_{12} = U_1 \cap U_2$ 上に、$(-1, 0, 0)$ に近く、$z > 0$ かつ $y < 0$ の部分にとる。$U_1 \cap U_2$ は $S^1 \times [0, 1]$ と同相である。従って $\pi_1(U_1 \cap U_2, b) \cong \boldsymbol{Z}$. U_1 は、X を変形レトラクトに持ち、X は $S^1 \vee S^1$ と同相だから、弧状連結な空間の基本群は、基点の取り方に依らないという問題 3.7 と上の例により、$\pi_1(U_1, b) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1, b_X) \cong \boldsymbol{Z} * \boldsymbol{Z}$ である。ここで、$b_X = (-1, 0, 0)$ である。$\pi_1(X, b_X)$ の生成元は、X の S^1 をそれぞれ 1 周する曲線 $\alpha_1(t) = (-2 + \cos 2\pi t, 0, \sin 2\pi t)$, $\alpha_2(t) = (-\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t, 0)$ $(t \in [0, 1])$ で代表される a_1, a_2 である。U_2 は、正方形の内部と同相で、$\pi_1(U_2, b) \cong \{\boldsymbol{1}\}$. ここで、$(i_1)_* : \pi_1(U_1 \cap U_2, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b)$ を計算する必要がある。図 6 からわかるように、$\pi_1(U_{12}, b)$ の生成元は、b から、α_1 の近傍を通り、α_2 の近傍を通り、さらに $\overline{\alpha_1}$ の近傍、$\overline{alpha_2}$ の近傍を通り、b に戻る U_{12} 上の曲線で表わされる。従って、$(i_1)_* : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b) \cong \pi_1(X, b_X)$ による $\pi_1(U_{12}, b) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元の像は、$[\alpha_1][\alpha_2][\alpha_1]^{-1}[\alpha_2]^{-1}$ で表わされる。従って、次を得る。

$$\pi_1(T^2, b) \cong (\boldsymbol{Z} * \boldsymbol{Z}) \underset{\boldsymbol{Z}}{*} \{\boldsymbol{1}\} \cong \langle a_1, a_2 \mid a_1 a_2 {a_1}^{-1} a_2^{-1} \rangle \cong \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$$

【問題 4.9】　3 次元ユークリッド空間の部分空間 X を次で定める。

$$\begin{aligned} X = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid \big((x^2 + y^2)^{1/2} - 2\big)^2 + z^2 = 1\} \\ \cup \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 \leqq 1\} \end{aligned}$$

トーラスの基本群は既知として、X の基本群を求めよ。図 7 左図参照。解答例は 26 ページ。

【問題 4.10】　写像 $f : S^1 \cong \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(\theta) = \big(\cos(2\theta)\{2 + \cos(3\theta)\}, \sin(2\theta)\{2 + \cos(3\theta)\}, \sin(3\theta)\big)$$

で定める。$\boldsymbol{R}^3 - f(S^1)$ の基本群を求めよ。この群の可換化（アーベル化）は何か。

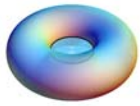
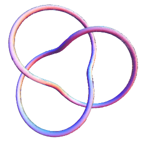
 

図 7: 問題 4.9，問題 4.10

ヒント: $T^2 = \{(x, y, z) \mid \left((x^2 + y^2)^{1/2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\}$ という曲面（トーラス）に注目し、ファンカンペンの定理を使う。
$\boldsymbol{R}^3 - f(S^1)$ の基本群が $\boldsymbol{Z}$ と異なること、つまり可換群でないことはどうすればわかるか。図 7 右図参照。解答例は、26 ページ。

5　問題の解答

【問題 2.3 の解答】　X が弧状連結であるが、連結ではないと仮定すると、$X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ となる空ではない開集合 U, V が存在する。$x_0 \in U$, $x_1 \in V$ に対し、弧状連結性から、連続写像 $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ で $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ を満たすものが存在する。$\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$ は、区間 $[0,1]$ の空ではない開集合で、$[0,1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$, $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \emptyset$ となる。これは、区間 $[0,1]$ が連結であることに矛盾する。

念のために区間 $[0,1]$ が連結であることも示そう。区間 $[0,1]$ が連結ではないとすると 0 を含む開集合 U があり、$[0,1] \setminus U$ が空ではない開集合となる。$W = \{a \in [0,1] \mid [0,a] \subset U\}$ を考えると、開集合の定義（各点のある ε 近傍を含む）から、W は 0 を含む開集合である。$m = \sup W$ をとると、$m \notin U$ である。実際、$m \in U$ ならば、$[0,1] \setminus U$ が空ではないから $m < 1$ であり、U は開集合だから、ある $\varepsilon > 0$ に対して $(m - \varepsilon, m + \varepsilon) \subset U$ となる。$\left[0, m - \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \subset U$ だから、$\left[0, m + \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \subset U$, $m + \dfrac{\varepsilon}{2} \in W$ となり、m が上限であることに反する。この結果、$m \in [0,1] \setminus U$ となるが、$[0,1] \setminus U$ が空ではない開集合だから、ある $\varepsilon > 0$ に対して $(m - \varepsilon, m + \varepsilon) \in [0,1] \setminus U$ となり、$\left[0, m - \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \subset U$ に反する。$[0,1]$ が連結でないと仮定したことが矛盾の原因だから、$[0,1]$ が連結であることが示された。

【問題 2.6 の解答】　f_0, f_1 の間のホモトピー $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ に対し、$\overline{F} : [0,1] \times W \longrightarrow Z$ を $\overline{F}(t, w) = g(F(t, h(w)))$ で定義すると、$\overline{F}$ は連続写像で、$g \circ f_0 \circ h$ と $g \circ f_1 \circ h$ の間のホモトピーとなる。

【問題 2.7 の解答】　反射律 $f \simeq f$ が成立するのは、$f : X \longrightarrow Y$ に対し $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ を $F(t, x) = f(x)$ とおけば示される。対称律 $f_0 \simeq f_1 \Longrightarrow f_1 \simeq f_0$ は、$f_0 \simeq f_1$ を与えるホモトピー $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ に対し、$F' : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ を $F'(t, x) = F(1 - t, x)$ で定義すれば確かめられる。推移律 $f_0 \simeq f_1$, $f_1 \simeq f_2 \Longrightarrow f_0 \simeq f_2$ は、$f_0 \simeq f_1$, $f_1 \simeq f_2$ を与えるホモトピー $F_1 : [0,1] \times X \longrightarrow Y$, $F_2 : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ に対し、$F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ を

$$F(t, x) = \begin{cases} F_1(2t, x) & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \\ F_2(2t - 1, x) & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

により定義すれば、F は補題 2.9 により、連続であり、$f_0 \simeq f_2$ を与えるホモトピーとなる。

【問題 2.11 の解答】　(1)　X が弧状連結ならば、K の各点 q に対し、$f|\{q\}$ は、X の 1 点 x_0 への定値写像 c_{x_0} にホモトピックである。従って、任意の $f : K \longrightarrow X$ は X の 1 点 x_0 への定値写像 c_{x_0} にホモトピックで、$[K, X]$ は 1 点集合である。逆に、X の 2 点 x_0, x_1 に対して、x_0 への定値写像 $c_{x_0} : K \longrightarrow X$, x_1 への定値写像 $c_{x_1} : K \longrightarrow X$ を考えるとこれらがホモトピックであるから、$p \in K$ に対して、ホモト

ピー $F:[0,1]\times K\longrightarrow X$ の $[0,1]\times\{p\}$ への制限により、$F(0,p)=x_0$, $F(1,p)=x_1$ となる曲線が得られる。従って、X は弧状連結である。

(2)　p を $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$ と考える。$r:\mathrm{Map}([0,1]^n,X)\longrightarrow\mathrm{Map}(\{\mathbf{0}\},X)$ を制限写像とし、$i:\mathrm{Map}(\{\mathbf{0}\},X)\longrightarrow\mathrm{Map}([0,1]^n,X)$ を $i(h)=c_{h(\mathbf{0})}$ で定義する。ここで、$c_{h(\mathbf{0})}$ は $h(\mathbf{0})$ への定値写像である。このとき、$r\circ i=\mathrm{id}_{\mathrm{Map}(\{\mathbf{0}\},X)}$、また、$(i\circ r)(f)=c_{f(\mathbf{0})}$ である。さらに、$f\simeq g:I^n\longrightarrow X$ ならば、$r(f)\simeq r(g):\{\mathbf{0}\}\longrightarrow X$ であり、$u\simeq v:\{\mathbf{0}\}\longrightarrow X$ ならば、$i(u)=c_{u(\mathbf{0})}\simeq c_{v(\mathbf{0})}=i(v)$. ゆえに、$r_*:[[0,1]^n,X]\longrightarrow[\{\mathbf{0}\},X]$, $i_*:[\{\mathbf{0}\},X]\longrightarrow[[0,1]^n,X]$ が定義され、$r_*\circ i_*=\mathrm{id}_{[\{\mathbf{0}\},X]}$ である。従って、i_* は単謝である。一方、i_* が全射であることは、$f:I^n\longrightarrow X$ が $f(\mathbf{0})$ への定値写像 $c_{f(\mathbf{0})}$ とホモトピックであるから従う。実際、このホモトピーは $F:[0,1]\times I^n\longrightarrow X$ を $F(t,\boldsymbol{x})=f(t\boldsymbol{x})$ で定義される。

【問題 2.18 の解答】　反射律 $X\simeq X$ はホモトピー同値写像として恒等写像 id_X をとればわかる。対称律 $X\simeq Y\implies Y\simeq X$ も定義より明らかである。推移律 $X_0\simeq X_1,\ X_1\simeq X_2\implies X_0\simeq X_2$ は次のように示す。ホモトピー同値写像を $f_0:X_0\longrightarrow X_1$, $f_1:X_1\longrightarrow X_2$ とし、それぞれのホモトピー逆写像を $g_0:X_1\longrightarrow X_0$, $g_1:X_2\longrightarrow X_1$ とする。$f_0\circ g_0\simeq\mathrm{id}_{X_1}$, $g_0\circ f_0\simeq\mathrm{id}_{X_0}$, $f_1\circ g_1\simeq\mathrm{id}_{X_2}$, $g_1\circ f_1\simeq\mathrm{id}_{X_1}$ が条件である。このとき、問題 2.6 の結果により、$f_1\circ f_0$ のホモトピー逆写像が $g_0\circ g_1$ であることがわかり、推移律が成立する。

$$(f_1\circ f_0)\circ(g_0\circ g_1)=f_1\circ(f_0\circ g_0)\circ g_1\simeq f_1\circ\mathrm{id}_{X_1}\circ g_1=f_1\circ g_1\simeq\mathrm{id}_{X_2}$$
$$(g_0\circ g_1)\circ(f_1\circ f_0)=g_0\circ(g_1\circ f_1)\circ f_0\simeq g_0\circ\mathrm{id}_{X_1}\circ f_0=g_0\circ f_0\simeq\mathrm{id}_{X_0}$$

【問題 2.19 の解答】

【問題 2.22 の解答】　(1)　円周 $S^1=\{(\cos\theta,\sin\theta)\in\boldsymbol{R}^2\mid\theta\in\boldsymbol{R}\}$ とし、円周から問題に書かれたメビウスの帯 M への写像を、$f:(\cos\theta,\sin\theta)\longmapsto(2\cos\theta,2\sin\theta,0)$, メビウスの帯から円周への写像を

$$g:((2+r\cos\theta)\cos2\theta,(2+r\cos\theta)\sin2\theta,r\sin\theta)\longmapsto(\cos2\theta,\sin2\theta)$$

で定義すると、$g\circ f=\mathrm{id}_{S^1}$,

$$(f\circ g)((2+r\cos\theta)\cos2\theta,(2+r\cos\theta)\sin2\theta,r\sin\theta)=(2\cos2\theta,2\sin2\theta,0)$$

であるが、$H:[0,1]\times M\longrightarrow M$ を

$$H(t,r,\theta)=\big((2+t\,r\cos\theta)\cos2\theta,(2+t\,r\cos\theta)\sin2\theta,t\,r\sin\theta)\big)$$

と定義し、$H_t(r,\theta)=H(t,r,\theta)$ とおくと、$H_1=\mathrm{id}_M$, $H_0=f\circ g$ となる。従って, $S^1\simeq M$ である。

円周から問題に書かれたアニュラス A への写像を、包含写像 i とし、A から S^1 への写像を $p:\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\longmapsto\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ とする。$p\circ i=\mathrm{id}_{S^1}$, $(i\circ p)(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ となる。$F_t(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^t}$ とすると、$F_0=\mathrm{id}_A$, $F_1=i\circ p$ となる。従って $S^1\simeq A$ である。

(2)　A は平面 $\boldsymbol{R}^2$ の開部分集合であるから, 円周からの A への連続な単射 c をとると、c の像は A を 2 つの弧状連結な開部分集合に分ける。実際, ジョルダンの閉曲線定理 2.20 により、c の像は平面 $\boldsymbol{R}^2$ を 2 つの弧状連結な開部分集合 U, V に分ける。$c(t)\in A$ の近傍は, U, V の両方に交わるので, $U\cap A$, $V\cap A$ の両方に交わる. $U\cap A$, $V\cap A$ はともに空ではない.

一方, メビウスの帯 M 上の閉曲線 $f(S^1)$ の補集合は

$$\{((2+r\cos\theta)\cos2\theta,(2+r\cos\theta)\sin2\theta,r\sin\theta)\mid r\in(0,1),\ \theta\in\boldsymbol{R}\}\subset\boldsymbol{R}^3$$

であり, $(0,1)\times\boldsymbol{R}/(2\pi\boldsymbol{Z})$ に同相で弧状連結である。

よって, A と M は同相ではない.

【問題 2.23 の解答】　(1)　$P=\boldsymbol{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}$ は $X=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\mid(x\pm1)^2+y^2=1\}$ とホモトピー同値である。実際、写像 $f:P\longrightarrow X$ を $\boldsymbol{x}=(x,y)$ に対し、

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{x}-e_1}{\|\boldsymbol{x}-e_1\|}+e_1 & (\|\boldsymbol{x}-e_1\|\leqq1\ \text{または}\ x\geqq1)\\ \dfrac{\boldsymbol{x}+e_1}{\|\boldsymbol{x}+e_1\|}-e_1 & (\|\boldsymbol{x}+e_1\|\leqq1\ \text{または}\ x\leqq-1)\\ (x,\pm\sqrt{1-x^2}) & (\|\boldsymbol{x}-e_1\|\geqq1\ \text{かつ}\ \|\boldsymbol{x}+e_1\|\geqq1\ \text{かつ}\ x\in[-1,1]\pm y\geqq0\end{cases}$$

包含写像 $i : X \longrightarrow P$ に対し、$f \circ i = \mathrm{id}_X$, $i \circ f \simeq \mathrm{id}_P$ である。後者のホモトピーは $F(t, \boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{x} + (1-t)(i \circ f)(\boldsymbol{x})$ で与えられる。

また、$Q = S^1 \times S^1 \setminus \{(0,0)\}$ は $Y = \{(x,y) \in S^1 \times S^1 \mid x = \dfrac{1}{2}$ または $y = \dfrac{1}{2}\}$ とホモトピー同値である。実際、$Z = [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]^2 \setminus \{(0,0)\}$, $W = \partial[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]^2$ について、$\widehat{g} : Z \longrightarrow W$ を $\widehat{g}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\boldsymbol{x}}{\max\{|x_1|, |x_2|\}}$ で定義し、$\widehat{i} : W \longrightarrow Z$ を包含写像とすると、$\widehat{g} \circ \widehat{i} = \mathrm{id}_W$, $\widehat{i} \circ \widehat{g} \simeq \mathrm{id}_Z$ である。後者のホモトピーは $F(t, \boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{x} + (1-t)(\widehat{i} \circ \widehat{g})(\boldsymbol{x})$ で与えられる。$S^1 = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と考えて、$p : Z \longrightarrow Q$ が定義され、$p(W) = Y$ である。上の連続写像 $\widehat{g}$, $\widehat{i}$ は、連続写像 $g : Q \longrightarrow Y$, $i : Y \longrightarrow Q$ を誘導し、$g \circ i = \mathrm{id}_Y$, $i \circ g \simeq \mathrm{id}_Q$ であり、Y と Q はホモトピー同値である。

X と Y は同相であるから、問題 2.18 により、P と Q はホモトピー同値である。

(2) $P = \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$ は平面 $\boldsymbol{R}^2$ の開部分集合であるから，円周からの P への連続な単射 c をとると、c の像は P を 2 つの弧状連結な開部分集合に分ける。実際，ジョルダンの閉曲線定理 2.20 により、c の像は平面 $\boldsymbol{R}^2$ を 2 つの弧状連結な開部分集合 U, V に分ける。$c(t) \in P$ の近傍は，U, V の両方に交わるので，$U \cap P$, $V \cap P$ の両方に交わる．$U \cap P$, $V \cap P$ はともに空ではない．

一方，$S^1 \times S^1$ 上の閉曲線 $S^1 \times \{\dfrac{1}{2}\}$ は、$S^1 \times S^1 \setminus \{(0,0)\}$ 内の閉曲線であるが、$(S^1 \times S^1 \setminus \{(0,0)\}) \setminus S^1 \times \{\dfrac{1}{2}\} \approx S^1 \times (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}) \setminus \{(0,0)\}$ は弧状連結である。

従って、$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$ と $S^1 \times S^1 \setminus \{(0,0)\}$ は同相でない。

【問題 2.27 の解答】 $i : (B^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\boldsymbol{R}^n, S^{n-1})$ を包含写像、$j : (\boldsymbol{R}^n, S^{n-1}) \longrightarrow (B^n, S^{n-1})$ を $j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} & (\|\boldsymbol{x}\| \leqq 1) \\ \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} & (\|\boldsymbol{x}\| \geqq 1) \end{cases}$ で定めると、$j \circ i = \mathrm{id}_{(B^n, S^{n-1})}$, $i \circ j \simeq \mathrm{id}_{(\boldsymbol{R}^n, S^{n-1})}$ である。後者のホモトピーは, $F_t(\boldsymbol{x}) = (1-t)(i \circ j)(\boldsymbol{x}) + t\boldsymbol{x}$ で与えられる。

$(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus B^n)$ は、$(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus B^n_{1/2})$ ($B^n_{1/2} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq \dfrac{1}{2}\}$) と同相だから、$(B^n, S^{n-1}) \simeq (\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus B^n_{1/2})$ を示せばよい。$i : (B^n, S^{n-1}) \longrightarrow (\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus B^n_{1/2})$ を包含写像、$j : (\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus B^n_{1/2}) \longrightarrow (B^n, S^{n-1})$ を $j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 2\boldsymbol{x} & (\|\boldsymbol{x}\| \leqq 1) \\ \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} & (\|\boldsymbol{x}\| \geqq 1) \end{cases}$ で定めると、$j \circ i = \mathrm{id}_{(B^n, S^{n-1})}$ $i \circ j \simeq \mathrm{id}_{(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n \setminus B^n_{1/2})}$ である。後者のホモトピーも, $F_t(\boldsymbol{x}) = (1-t)(i \circ j)(\boldsymbol{x}) + t\boldsymbol{x}$ で与えられる。

【問題 2.29 の解答】 $\underline{f}$ は全単射である。また、商位相の定義から、$\underline{f}$ は連続写像である。逆写像 $\underline{f}^{-1}$ が連続であるためには、$\underline{f}$ が開写像（開集合の像が開集合になる写像）であることを言えばよい。同値類への射影を $p : X \longrightarrow X/A$ とする。

$U \subset X/A$ が A/A を含まない開集合ならば、$p^{-1}(U) \subset X \setminus A$ は、開集合で、$\underline{f}(U) = f(p^{-1}(U))$ は仮定から、$Y \setminus \{b\}$ の開集合になり、Y の開集合となる。

$U \subset X/A$ が A/A を含む開集合ならば、$p^{-1}(U)$ は A を含む開集合である。従って $X \setminus p^{-1}(U)$ は、閉集合で、X をコンパクトとしたから、コンパクト集合である。従って、$f(X \setminus p^{-1}(U))$ は Y のコンパクト集合で、Y はハウスドルフ空間だから $f(X \setminus p^{-1}(U))$ は閉集合となる。従って $\underline{f}(U) = f(p^{-1}(U)) = Y \setminus f(X \setminus p^{-1}(U))$ は開集合となる。

【問題 2.31 の解答】 空間対 $([0,1]^n, \partial[0,1]^n)$ と空間対 (D^n, S^{n-1}) は同相である。同相写像 $f : ([0,1]^n, \partial[0,1]^n) \longrightarrow (D^n, S^{n-1})$ は、$f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} - (1, \dots, 1)$ で定義される $f : ([0,1]^n, \partial[0,1]^n) \longrightarrow ([-1,1]^n, \partial[-1,1]^n)$ と、$g : ([-1,1]^n, \partial[-1,1]^n) \longrightarrow (D^n, S^{n-1})$ の合成写像として得られる。ここで、g は、$g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$, $g(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ で与えられる。

$D^n/S^{n-1} \longrightarrow S^n$ は次の写像 $h : D^n \longrightarrow S^n$ で与えられる。$h(\boldsymbol{x}) = (1 - 2\|\boldsymbol{x}\|^2, 2\sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x})$. 実際、$\|h(\boldsymbol{x})\|^2 = (1 - 2\|\boldsymbol{x}\|^2)^2 + 4(1 - \|\boldsymbol{x}\|^2)\|\boldsymbol{x}\|^2 = 1$ であり、像は球面に含まれる。また、$(y_0, \boldsymbol{y}) \in S^n$ に対し、$y_0 \neq -1$ ならば、$\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\sqrt{4 - (1 + y_0)^2}}\boldsymbol{y}$ であり、$h^{-1}(1, \boldsymbol{0}) = S^{n-1}$ となる。$h|D^n \setminus S^{n-1}$ は、$S^n \setminus \{-\boldsymbol{e}_1\}$ $(\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0))$ への同相写像であり、D^n はコンパクトであるから、問題 2.29 により、$(D^n/\partial D^n, \partial D^n/\partial D^n) \approx (S^n, -\boldsymbol{e}_1)$ である。

【問題 3.2 の解答】 (1) $f_1 \simeq f_1'$, $f_2 \simeq f_2'$ に対して $f_1 \natural f_2 \simeq f_1' \natural f_2'$ となること。

$f_1 \simeq f_1'$, $f_2 \simeq f_2'$ を与えるホモトピーを $F_1 : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$, $F_2 : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ とするとき、$F_1 \natural F_2 : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ を

$$(F_1 \natural F_2)(s, t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} F_1(s, 2t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [0, \frac{1}{2}]) \\ F_2(s, 2t_1 - 1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

とおけば、$f_1 \natural f_2 \simeq f_1' \natural f_2'$ をあたえるホモトピーとなる。

(2) $(f_1 \natural f_2) \natural f_3 \simeq f_1 \natural (f_2 \natural f_3)$ であることを示す。t_1 方向への定義域を勘案して、$(f_1 \natural f_2) \natural f_3$ を図 4 の左図の左の辺、$f_1 \natural (f_2 \natural f_3)$ を図 4 の左図の右の辺に対応するようにするとよい。

$$((f_1 \natural f_2) \natural f_3)(t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} f_1(4t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [0, \frac{1}{4}]) \\ f_2(4t_1 - 1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) \\ f_3(2t_1 - 1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

$$(f_1 \natural (f_2 \natural f_3))(t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} f_1(2t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [0, \frac{1}{2}]) \\ f_2(4t_1 - 2, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) \\ f_3(4t_1 - 3, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{3}{4}, 1]) \end{cases}$$

の間のホモトピー $F(s, t_1, \boldsymbol{t}')$ $(s \in [0,1])$ を

$$F(s, t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} f_1(\frac{4t_1}{1+s}, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [0, \frac{1+s}{4}]) \\ f_2(s + 4t_1 - 2, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}]) \\ f_3(1 - \frac{4(1-t_1)}{2-s}, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{2+s}{4}, 1]) \end{cases}$$

とすればよい。

(3) $f \simeq f \natural c_{b_X}$ を示す。$f \simeq c_{b_X} \natural f$ も同様である。

$$(f \natural c_{b_X})(t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} f(2t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [0, \frac{1}{2}]) \\ b_X & (t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

だから、$s \in [0,1]$ に対し、

$$F(s, t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} f((1+s)t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [0, \frac{1}{1+s}]) \\ b_X & (t_1 \in [\frac{1}{1+s}, 1]) \end{cases}$$

とすればよい。

(4) $f \natural \overline{f} \simeq c_{b_X}$ を示す。$\overline{f} \natural f \simeq c_{b_X}$ も同様である。

$$(f \natural \overline{f})(t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} f(2t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [0, \frac{1}{2}]) \\ f(2 - 2t_1, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

だから、

$$F(s, t_1, \boldsymbol{t}') = \begin{cases} b_X & (t_1 \in [0, \frac{s}{2}]) \\ f(2t_1 - s, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{s}{2}, \frac{1}{2}]) \\ f(2 - 2t_1 - s, \boldsymbol{t}') & (t_1 \in [\frac{1}{2}, 1 - \frac{s}{2}]) \\ b_X & (t_1 \in [1 - \frac{s}{2}, 1]) \end{cases}$$

と置けばよい。

【問題 3.5 の解答】 $\mathrm{pr}_X : X \times Y \longrightarrow X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ を射影とする。$f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X \times Y, (b_X, b_Y))$ に対して, $f_X = \mathrm{pr}_X \circ f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$, $f_Y = \mathrm{pr}_Y \circ f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (Y, b_Y)$ が得られる。これは準同型 $((\mathrm{pr}_X)_*, (\mathrm{pr}_Y)_*) : \pi_n(X \times Y, (b_X, b_Y)) \longrightarrow \pi_n(X, b_X) \times \pi_n(Y, b_Y)$ を誘導する。

この準同型は全射である。実際、$[g] \in \pi_n(X, b_X)$, $[h] \in \pi_n(X, b_X)$ に対して、$(g, h) : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X \times Y, (b_X, b_Y))$ が得られ、$\mathrm{pr}_X \circ (g, h) = g$, $\mathrm{pr}_Y \circ (g, h) = h$ を満たす。

この準同型は単射である。実際、$f_X \simeq c_{b_X}$ を与えるホモトピーを $F_X : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow X$, $f_Y \simeq c_{b_Y}$ を与えるホモトピーを $F_Y : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow Y$ とすると、$F = (F_X, F_Y) : [0,1] \times (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, Y)$ が、$f \simeq c_{(b_X, b_Y)}$ を与えるホモトピーとなる。

【問題 3.6 の解答】 ヒントにある内部が交わらない 2 つの直方体 K_1, K_2 と、f_1, $f_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b)$ に対し、F_{K_1, K_2} を K_1 上で $(f_1)_{K_1}$, K_2 上で $(f_2)_{K_2}$, $I^n \smallsetminus (K_1 \cup K_2)$ を b に写す写像とする。$f_1 \natural f_2 = F_{[0,\frac{1}{2}] \times I^{n-1}, [\frac{1}{2},1] \times I^{n-1}}$, $f_2 \natural f_1 = F_{[\frac{1}{2},1] \times I^{n-1}, [0,\frac{1}{2}] \times I^{n-1}}$ であるが、

$$\begin{aligned} F_{[0,\frac{1}{2}] \times I^{n-1}, [\frac{1}{2},1] \times I^{n-1}} &\simeq F_{[0,\frac{1}{2}]^2 \times I^{n-2}, [\frac{1}{2},1]^2 \times I^{n-2}} \\ &\simeq F_{[\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}] \times I^{n-2}, [0,\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2},1] \times I^{n-2}} \\ &\simeq F_{[\frac{1}{2},1] \times I^{n-1}, [0,\frac{1}{2}] \times I^{n-1}} \end{aligned}$$

である。実際ホモトピーは、順に $K^{(1)}_{1,t} = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{2-t}{2}] \times I^{n-2}$, $K^{(1)}_{2,t} = [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{t}{2}, 1] \times I^{n-2}$ に対する $F_{K^{(1)}_{1,t}, K^{(1)}_{2,t}}$, $K^{(2)}_{1,t} = [\frac{t}{2}, \frac{1+t}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \times I^{n-2}$, $K^{(2)}_{2,t} = [\frac{1-t}{2}, \frac{2-t}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1] \times I^{n-2}$ に対する $F_{K^{(2)}_{1,t}, K^{(2)}_{2,t}}$, $K^{(3)}_{1,t} = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1+t}{2}] \times I^{n-2}$, $K^{(3)}_{2,t} = [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1-t}{2}, 1] \times I^{n-2}$ に対する $F_{K^{(3)}_{1,t}, K^{(3)}_{2,t}}$ で与えられる。

【問題 3.7 の解答】 $b_X, b'_X \in X$ に対して、b_X, b'_X を結ぶ曲線 γ ($\gamma(0) = b_X$, $\gamma(1) = b'_X$) をとる。$\boldsymbol{t} = (t_1, \boldsymbol{t}') = (t_1, \dots, t_n) \in I^n$ に対し、$\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) = \min\{|t_1|, |1-t_1|, \dots, |t_n|, |1-t_n|\}$ と置く。$f \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$\overline{\gamma}_\# f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b'_X)$ を次で定義する。$\boldsymbol{c} = (\dfrac{1}{2}, \boldsymbol{c}') = (\dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{2})$ とおく。

$$\overline{\gamma}_\# f = \begin{cases} \gamma(1 - 4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n)) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq 1) \\ f(\boldsymbol{c} + 2(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{c})) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \geqq 1) \end{cases}$$

図 8 参照。同様に $g \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b'_X))$ に対し、$\gamma_\# g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ を次で定義する。

$$\gamma_\# g = \begin{cases} \gamma(4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n)) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq 1) \\ g(\boldsymbol{c} + 2(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{c})) & (4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \geqq 1) \end{cases}$$

$\overline{\gamma}_\#$ は準同型写像 $\overline{\gamma}_* : \pi_n(X, b_X) \longrightarrow \pi_n(X, b'_X)$ を誘導する。すなわち、$\overline{\gamma}_\#(\overline{f}) = \overline{\overline{\gamma}_\#(f)}$、$\overline{\gamma}_\#(f_1) \natural \overline{\gamma}_\#(f_2) \simeq \overline{\gamma}_\#(f_1 \natural f_2)$ が成立する。

実際、定義から $\overline{\overline{\gamma}_\#(f)} = \overline{\gamma}_\# \overline{f}$ である。

また、f_1, $f_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ に対して、$\overline{\gamma}_\#(f_1 \natural f_2)$, $(\overline{\gamma}_\# f_1) \natural (\overline{\gamma}_\# f_1) : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b'_X)$ は、ホモトピックであり、その間のホモトピーは、

$$\begin{aligned} &F(s, t_1, \boldsymbol{t}') \\ &= \begin{cases} f_1(\frac{1}{4} + \frac{s}{8} + 4(t_1 - \frac{1}{2}), \boldsymbol{c}' + 2(\boldsymbol{t}' - \boldsymbol{c}')) & \boldsymbol{t} \in [\frac{1}{8} + \frac{s}{8}, \frac{3}{8} + \frac{s}{8}] \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^{n-1} \\ f_2(\frac{3}{4} - \frac{s}{8} + 4(t_1 - \frac{1}{2}), \boldsymbol{c}' + 2(\boldsymbol{t}' - \boldsymbol{c}')) & \boldsymbol{t} \in [\frac{5}{8} - \frac{s}{8}, \frac{7}{8} - \frac{s}{8}] \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^{n-1} \\ \gamma(a(s, \boldsymbol{t})) & \boldsymbol{t}\text{が上の直方体に含まれない} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、

$$a(s, \boldsymbol{t}) = 1 - \min\{\frac{|t_1|}{\frac{1}{8} + \frac{1-s}{8}}, \frac{|1-t_1|}{\frac{1}{8} + \frac{1-s}{8}}, \frac{|t_1 - \frac{1}{2}|}{\frac{1}{8}} + 1 - s, 4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}', \partial I^{n-1})\}$$

である。このホモトピーを図示したものが図 9 である。

従って、$\overline{\gamma}_* : \pi_n(X, b_X) \longrightarrow \pi_n(X, b'_X)$ が誘導される。

同様に $\gamma_\#$ は準同型写像 $\gamma_* : \pi_n(X, b'_X) \longrightarrow \pi_n(X, b_X)$ を誘導する。

$\gamma_\# \overline{\gamma}_\# f$ が f とホモトピックであることは、次のホモトピーによりわかる。

$$\begin{aligned} &F(s, \boldsymbol{t}) \\ &= \begin{cases} \gamma(4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n)) & (\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq \frac{1-s}{4}) \\ \gamma(3(1-s) - 8\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n)) & (\frac{1-s}{4} \leqq \mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq \frac{3(1-s)}{8}) \\ f(\boldsymbol{c} + (4 - 3s)(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{c})) & (\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \geqq \frac{3(1-s)}{8}) \end{cases} \end{aligned}$$

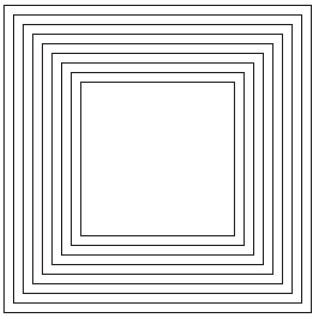


図 8: 問題 3.7 は $\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq \frac{1}{4}$ の部分をつかう

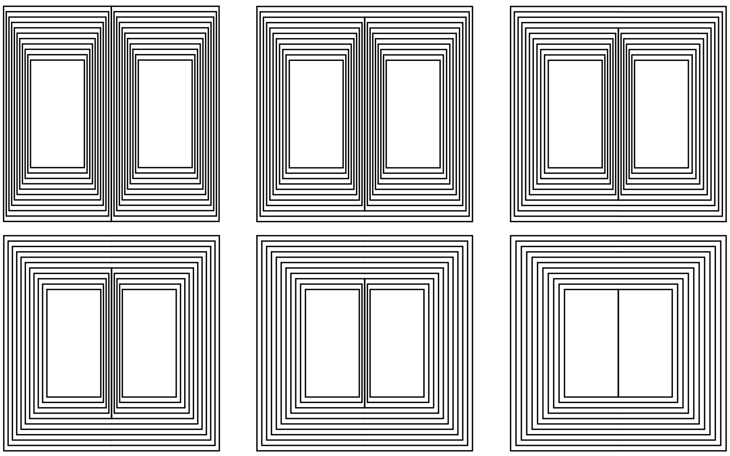


図 9: 問題 3.7 の準同型

【問題 3.8 の解答】 問題 2.31 により、$([0,1]/\{0,1\},\{0,1\}/\{0,1\}) \approx (S^1, b_{S^1})$ であるから、$\alpha : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X, b_X)$ に対して、$S^1 = [0,1]/\{0,1\}$ からの写像 $C(\alpha) : S^1 \longrightarrow X$ を対応させる写像 $\pi_1(X, b_X) \longrightarrow [S^1, X]$ が定まる。これが、写像 $C \longrightarrow [S^1, X]$ を適切に定義していることは、$[\beta][\alpha][\beta]^{-1} \in \pi_1(X, b_X)$ は, $(\beta\natural\alpha)\natural\overline{\beta}$ のホモトピー類として定義されるが、$\beta_s(t) = \beta(s + (1-s)t)$ と置くと、$C((\beta_s\natural\alpha)\natural\overline{\beta_s})$ は、基点を考えない円周からの写像 $C((\beta\natural\alpha)\natural\overline{\beta})$ と $C((\beta_1\natural\alpha)\natural\overline{\beta_1})$ の間のホモトピーとなることからわかる。$(\beta_1\natural\alpha)\natural\overline{\beta_1} = (c_{b_X}\natural\alpha)\natural c_{b_X} \simeq \alpha$ だから、$C((\beta\natural\alpha)\natural\overline{\beta}) \simeq C(\alpha) : S^1 \longrightarrow X$ である。

全射であることは、$f : S^1 = [0,1]/\{0,1\} \longrightarrow X$ に対し、b_X と $f(1)$ を結ぶ曲線 $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ $(\gamma(0) = b_X,\ \gamma(1) = f(1))$ をとる。$(\gamma\natural f)\natural\overline{\gamma}$ を考えると、$[(\gamma\natural f)\natural\overline{\gamma}] \in \pi_1(X, b_X)$ で、上の議論と同様に $C((\gamma\natural f)\natural\overline{\gamma}) \simeq f$ となる。

単射であること。$\alpha,\ \beta : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X, b_X)$ に対して、$C(\alpha) \simeq C(\beta) : S^1 \longrightarrow X$ とする。$F : [0,1]\times S^1 = [0,1]\times([0,1]/\{0,1\}) \longrightarrow X$ を $C(\alpha), C(\beta)$ の間のホモトピー $(C(\alpha)(t) = F(0,t),\ C(\beta)(t) = F(1,t))$ とする。$\gamma(s) : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X, b_X)$ を $\gamma(s) = F(s,1)$ で定義する。$p : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]\times S^1$ を $p(s,t) = (s,[t])$ として、$\alpha(t) = (F\circ p)(0,t)$, $\beta(t) = (F\circ p)(1,t)$, $\gamma(s) = (F\circ p)(s,0)$, $\overline{\gamma}(s) = (F\circ p)(1-s,1)$ である。$(\gamma\natural\beta)\natural\overline{\gamma} \simeq \alpha : ([0,1],\{0,1\}) \longrightarrow (X, b_X)$ だから、α, β は $\pi_1(X, b_X)$ において共役である。実際、ホモトピーは、$u \in [0,1]$ に対し、$[0,1]\times[0,1]$ 上の $(0,0)$, $(u, \dfrac{1-u}{4})$, $(u, \dfrac{1+u}{2})$, $(0,1)$ を結ぶ折れ線に対する $F\circ p$ の曲線を対応させるものを作ればよい。

$$A(u,t) = \begin{cases} (4tu, t(1-u)) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ (u, (t-\frac{1}{4})(3u+1) + \frac{1-u}{4}) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ ((2-2t)u, t(1-u)+u) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

【問題 3.9 の解答】 同相写像 $h : (I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \approx (S^n, b_{S^n})$ を固定し、$p : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)$ を射影とすると、$f : (S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (X, b_X)$ に対し、$\widehat{f} = f\circ h\circ p : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ が定まる。一方、連続写像 $g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ は、連続写像 $\underline{g} : (I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ で、$\underline{g}\circ p = g$ となるものを定めるから、$\underline{g}\circ h^{-1} : (S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (X, b_X)$ が定まる。従って、全単射 $(h\circ p)^* : \mathrm{Map}((S^n, b_{S^n}), (X, b_X)) \longrightarrow \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ が得られる。

ここで、$f_0 \simeq f_1 : (S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (X, b_X)$ ならば、$f_0\circ h\circ p \simeq f_1\circ h\circ p$ だから、写像 $(h\circ p)^* : [(S^n, b_{S^n}), (X, b_X)] \longrightarrow \pi_n(X, b_X)$ が定義される。写像の空間上で全単射であったから、これは全射である。一方、単射であることも容易にわかる。実際、$f_0,\ f_1 : (S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (X, b_X)$ に対し、$f_0\circ h\circ p \simeq f_1\circ h\circ p$ とすると、ホモトピー $F : [0,1]\times(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ は、連続写像 $\underline{F} : [0,1]\times(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ を誘導するから、$\underline{f_0\circ h\circ p} \simeq \underline{f_1\circ h\circ p}$ である。すなわち、$f_0\circ h \simeq f_1\circ h$, 従って、$f_0 \simeq f_1$ である。

【問題 3.10 の解答】 $p : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)$ を射影とし, 同相写像 $h : (I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \longrightarrow (S^n, b_{S^n})$ を固定する。$b_{S^n} = -\boldsymbol{e}_1 = (-1, 0, \ldots, 0)$ とする。

X は弧状連結とし $\pi_n(X, b_X) \cong \{0\}$ とする。任意の $f : S^{k-1} \longrightarrow X$ に対し、$f\circ h\circ p : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, f(b_{S^n}))$ を考える。問題 3.7 により、$\pi_n(X, f(b_{S^n})) \cong \{0\}$ だから、問題 3.9 により、 $[(S^n, b_{S^n}), (X, f(b_{S^n}))]$ は 1 点から成り、$F : ([0,1]\times(S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (X, f(b_{S^n}))$ で、$F(1,x) = f(x)$, $F(0,x) = f(b_{S^n})$ となるものがある。このとき、例題 2.12 により、$g : D^{n+1} \longrightarrow X$ で、$g|S^n = f$ をみたすものがえられる。

任意の $f : S^n \longrightarrow X$ に対し、$g : D^{n+1} \longrightarrow X$ で $g|S^n = f$ をみたすものがあるとする。$\pi_n(X, b_X)$ の元の代表元 $a : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ をとる。$\underline{a}\circ h^{-1} : (S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (X, b_X)$ に対し、$g : D^{n+1} \longrightarrow X$ で $g|S^n = \underline{a}\circ h^{-1}$ なるもの得られる。$t \in [0,1]$ に対し、$k_t : (S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (D^{n+1}, b_{S^n})$ を $k_t(\boldsymbol{x}) = t(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1) - \boldsymbol{e}_1$ とおく。$g\circ k_t\circ h\circ p : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, b_X)$ は、$(g\circ k_t\circ h\circ p)(\partial I^n) = b_X$ を満たし、$g\circ k_1\circ h\circ p = a$ と $g\circ k_0\circ h\circ p = c_{b_X}$ の間のホモトピーを与える。従って、$\pi_n(X, b_X) \cong 0$ となる。

【問題 3.11 の解答】 関数 $d : I^n \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を $d(\boldsymbol{t}) = \mathrm{dist}(f(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{R}^n \smallsetminus U)$ で定義する。$\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2 \in I^n$ に対し、$|d(\boldsymbol{t}_1) - d(\boldsymbol{t}_2)| \leqq \|f(\boldsymbol{t}_1) - f(\boldsymbol{t}_2)\|$ であるから、d は連続である。d は正値であるから、I^n 上で最小値をもつ。それを ε とおく。このとき、$g : I^n \longrightarrow U$ が、$\sup_{\boldsymbol{t}\in I^n} \|g(\boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{t})\| < \varepsilon$ をみたすならば、$g(\boldsymbol{t})$, $f(\boldsymbol{t})$ を結ぶ線分は U に含まれる。

【問題 3.12 の解答】 問題 3.11 の ε をとる。写像 $f_1 : I^n \longrightarrow U$ を $f_1 = \begin{cases} f(\boldsymbol{c} + 2(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{c})) & \mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \geqq \frac{1}{4} \\ b & \mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq \frac{1}{4} \end{cases}$ で定義すると、f_1 は f とホモトピックである。

滑らかな写像の構成。f_1 は一様連続だから、正実数 $\delta_1 < \dfrac{1}{4}$ で、$\|\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2\| < \delta_1$ ならば $\|f_1(\boldsymbol{t}_1) - f_1(\boldsymbol{t}_2)\| < \varepsilon$ となるものがある。ρ を $\{\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{t}\| < \delta_1\}$ に台を持つ C^∞ 級関数で、$\displaystyle\int \rho(\boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\,t_1 \cdots \mathrm{d}\,t_n = 1$ を満たすものとする。ρ とのコンボリューション $\rho * f_1(\boldsymbol{t}) = \displaystyle\int f_1(\boldsymbol{s})\rho(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t})\,\mathrm{d}\,s_1 \cdots \mathrm{d}\,s_n$ を考えると、$\rho * f_1$ は C^∞ 級であり、$\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき、$f_1(\boldsymbol{t}) = b$ だから、$(\rho * f_1)(\partial I^n) = b$ である。また、$\|\rho * f_1(\boldsymbol{t}) - f_1(\boldsymbol{t})\| = \|\displaystyle\int (f_1(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}) - f_1(\boldsymbol{t}))\rho(\boldsymbol{s})\,\mathrm{d}\,s_1 \cdots \mathrm{d}\,s_n\| \leqq \displaystyle\int \|f_1(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}) - f_1(\boldsymbol{t})\|\rho(\boldsymbol{s})\,\mathrm{d}\,s_1 \cdots \mathrm{d}\,s_n \leqq \varepsilon$ であり、問題 3.11 により、f_1, $\rho * f_1$ は U への写像としてホモトピックである。$\rho * f_1$ が、求める C^∞ 級関数 g である。

区分線型写像の構成。f_1 は一様連続だから、$\|\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2\| < \delta$ ならば $\|f_1(\boldsymbol{t}_1) - f_1(\boldsymbol{t}_2)\| < \dfrac{1}{2}\varepsilon$ となるものがある。正整数 $N > \dfrac{\sqrt{n}}{\delta}$ をとり、I^n を各座標方向に N 等分する $(N \geqq 4)$。得られた N^n 個の立方体を $n!$ 個の単体に分割する。これは、I^n の単体による分割 $\{(t_1, \ldots, t_n) \mid 1 \geqq t_{\sigma(1)} \geqq \cdots \geqq t_\sigma(n) \geqq 0\}$ ($\sigma \in \mathcal{S}_n$ (n 次対称群)) と相似にとられているとする。写像 $\overline{f}_1 : I^n \longrightarrow U$ を頂点 $(\dfrac{i_1}{N}, \ldots, \dfrac{i_n}{N})$ を $f_1(\dfrac{i_1}{N}, \ldots, \dfrac{i_n}{N})$ に写し各単体上でアフィン写像となっているものと定義する。$\mathrm{dist}(\boldsymbol{t}, \partial I^n) \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき、$f_1(\boldsymbol{t}) = b$ だから、$(\overline{f}_1)(\partial I^n) = b$ である。$\boldsymbol{t} \in I^n$ に対し、$\boldsymbol{t}$ と同じ単体の頂点 $\boldsymbol{t}_1$ をとると、1 つの単体のアフィン写像による像の直径は $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 以下であり、$\|f_1(\boldsymbol{t}_1) - f_1(\boldsymbol{t})\| \leqq \dfrac{\varepsilon}{2}$ だから、$\|\overline{f}_1(\boldsymbol{t}) - f_1(\boldsymbol{t})\| = \|\overline{f}_1(\boldsymbol{t}) - \overline{f}_1(\boldsymbol{t}_1) + f_1(\boldsymbol{t}_1) - f_1(\boldsymbol{t})\| = \|\overline{f}_1(\boldsymbol{t}) - \overline{f}_1(\boldsymbol{t}_1)\| + \|f_1(\boldsymbol{t}_1) - f_1(\boldsymbol{t})\| \leqq \varepsilon$ となる。$\overline{f}_1$ が求める区分線型写像である。

【問題 3.13 の解答】 (S^n, b_{S^n}) は、$(\boldsymbol{R}^{n+1} \smallsetminus \{\boldsymbol{0}\}, b_{S^n})$ とホモトピー同値で、包含写像 $i : (S^n, b_{S^n}) \longrightarrow (\boldsymbol{R}^{n+1} \smallsetminus \{\boldsymbol{0}\}, b_{S^n})$, 半径方向の射影 $p : (\boldsymbol{R}^{n+1} \smallsetminus \{\boldsymbol{0}\}, b_{S^n}) \longrightarrow (S^n, b_{S^n})$ は、ホモトピー同値写像である。$f : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (S^n, b_{S^n})$ に対し、$i \circ f : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (\boldsymbol{R}^{n+1} \smallsetminus \{\boldsymbol{0}\}, b_{S^n})$ は問題 3.12 により、滑らかな写像、あるいは区分線型な写像 g とホモトピックである。このとき、$p \circ g$ は、$k < n$ だから、S^n への全射ではない。その理由は、g が滑らかな写像ならば、$p \circ g$ は滑らかな写像で、サードの定理により、全射とならない。g が区分線型な写像のときには、初等的に説明できる。各 k 単体の像と原点は、$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の高々$k+1$ 次元の部分空間に含まれる。$p \circ g$ の像は、このような有限個の部分空間の和集合と S^n の共通部分に含まれるから、$p \circ g$ は全射にならない。

従って、$p \circ g : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (S^n, b_{S^n})$ の像に含まれない点 $y \in S^n$ が存在する。$(S^n \smallsetminus \{y\}, b_{S^n})$ は $(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{0})$ と同相であり、$(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{0})$ は $(\{\boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{0})$ とホモトピー同値であるから、$p \circ g \simeq c_{b_{S^n}}$ である。

こうして、$\pi_k(S^n, b_{S^n}) \cong 0$ が示された。

【問題 3.14 の解答】 i_* が全射であることを示す。$f : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (U, b)$ は、問題 3.12 により、滑らかな写像、あるいは区分線型な写像 $g : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックである。$k < n$ だから、像 $g(I^k)$ の補集合は、至る所稠密な開集合である。$p \notin g(I^k)$ ならば、$i_*[g] = [f] \in \pi_k(U, b)$ となる。$p \in g(I^k)$ のとき、p の近傍に台を持つ U 上のベクトル場が生成するフローで φ_t で、$\varphi_1(p) \notin g(I^k)$ となるものが構成できる。実際、$q \in U \smallsetminus g(I^k)$ を p の近くにとり、p の近傍で $q-p$ となるベクトル場をとればよい。このとき、$p \notin (\phi_{-1} \circ g)(I^k)$ である。$i_*[\phi_{-1} \circ g] = (\phi_{-1})_*[g] = [g] = [f] \in \pi_k(U, b)$ となる。

i_* が単射であることを示す。$f : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (U \smallsetminus \{p\}, b)$ に対し、$i \circ f \simeq c_b : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (U, b)$ とする。このホモトピー $F : [0,1] \times I^k \longrightarrow U$ は、$F(\partial([0,1] \times I^k)) \subset U \smallsetminus \{p\}$ を満たしている。従って、$\partial([0,1] \times I^k)$ の近傍 V に対し、$F(V) \subset$

$U \setminus \{p\}$ である。問題 3.11 と同様にして、F を近似する $[0,1] \times I^k \setminus V$ 上では滑らかあるいは区分線型な写像 $G : [0,1] \times I^k \longrightarrow U$ で、$G|\partial([0,1] \times I^k) = F|\partial([0,1] \times I^k)$ を満たし、F と $\partial([0,1] \times I^k)$ を固定してホモトピックなものをとることができる。$k+1 < n$ だから、像 $G([0,1] \times I^k)$ の補集合は、p の近傍で稠密な開集合である。$p \notin G([0,1] \times I^k)$ ならば、G が $f \simeq c_b : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (U \setminus \{p\}, b)$ とするホモトピーを与えている。$p \in G([0,1] \times I^k)$ のとき、p の近傍に台を持つ U 上のベクトル場が生成するフローで φ_t で、$\varphi_1(p) \notin G([0,1] \times I^k)$ となるものが構成できる。このとき、$\phi_{-1} \circ G$ が、$f \simeq c_b : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (U \setminus \{p\}, b)$ とするホモトピーを与えている。

【問題 4.1 の解答】 問題 3.5 により、直積空間の基本群は基本群の直積となるから、$\pi_1(T^n, b_{T^n}) \cong \pi_1(S^1, b_{S^1}) \times \cdots \times \pi_1(S^1, b_{S^1}) \cong \boldsymbol{Z}^n$.

【問題 4.2 の解答】 $f \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ となる f に対して、$f_* i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1,b)} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{Z}}$ となる。ところが、$\pi_1(D^2, b) \cong \{1\}$ だから、$f_* i_* = 0$ であり、矛盾する。

【問題 4.3 の解答】 $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ と $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ $(n \geqq 3)$ が同相ではないことを示せばよい。同相写像 $h : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 \setminus \{0\}$ があれば $\pi_1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}, b) \cong \pi_1(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}, h(b))$ となるが、$\pi_1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}, b) \cong \boldsymbol{Z}$ と、問題 3.13 の $\pi_1(\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}, h(b)) \cong 0$ に反する。

【問題 4.4 の解答】 (1) $\mathrm{dist}(x,a) \leqq \mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,a)$ において、まず、左辺について $\inf_{a \in A}$ をとり、その後で右辺について $\inf_{a \in A}$ をとると、$\inf_{a \in A} \mathrm{dist}(x,a) \leqq \mathrm{dist}(x,y) + \inf_{a \in A} \mathrm{dist}(y,a)$、すなわち $d_A(x) \leqq \mathrm{dist}(x,y) + d_A(y)$ である。x, y を交換した式も成立するから、$|d_A(x) - d_A(x)| \leqq \mathrm{dist}(x,y)$ が成立する。従って、d_A は X 上の連続関数である。

(2) $f_1, \ldots, f_k$ に対し、$A_i = \bigcap_{j \neq i} \{x \in X \mid f_i \geqq f_j\}$ とおくと、A_i は閉集合の共通部分で閉集合であり、$X = \bigcup_{i=1}^k A_i$ である。A_i 上で $F|A_i = f_i|A_i$ は連続であるから、補題 2.9 により、F は連続である。

(3) X の開被覆 $\{U_1, \ldots, U_k\}$ に現れる U_i に対し、$f_i(x) = d_{X \setminus U_i}(x)$ で $f_i : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を定義する。$F = \max\{f_1, \ldots, f_k\}$ を考えると、F は連続で、$x \in X$ はある開集合 U_i に含まれるから(x のある ε 近傍 $B_x(\varepsilon)$ は U_i に含まれるので)、F は正値である。X はコンパクトであるから、F の最小値 $\delta > 0$ が存在する。このとき、任意の点 x の δ 近傍 $B_x(\delta)$ は、ある U_i に含まれる。

【問題 4.9 の解答】 U_1 を、X におけるトーラス $T^2 = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid \big((x^2+y^2)^{1/2} - 2\big)^2 + z^2 = 1\}$ の近傍、U_2 を X における円板 $D^2 = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid z = 0, x^2+y^2 \leqq 1\}$ の近傍とし、$U_{12} = U_1 \cap U_2$ が円周 $S^1 = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid z = 0, x^2+y^2 = 1\}$ を変形レトラクトにもつようにできる。基点 $b = (-1,0,0)$ とすると、$\pi_1(U_1, b) \cong \pi_1(T^2, b) \cong \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$, $\pi_1(U_2, b) \cong \pi_1(D^2, b) \cong \{\boldsymbol{1}\}$, $\pi_1(U_{12}, b) \cong \pi_1(S^1, b) \cong \boldsymbol{Z}$ であり、$\pi_1(U_1, b)$ の生成元は、$\alpha_1(t) = (-2 + \cos 2\pi t, 0, \sin 2\pi t)$, $\alpha_2(t) = (-\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t, 0)$ $(t \in [0,1])$ で代表される a_1, a_2 である。$\pi_1(U_{12}, b)$ は、α_2 で代表される a_2 で生成される。従って、次を得る。

$$\pi_1(X,b) \cong (\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}) \underset{\boldsymbol{Z}}{*} \{\boldsymbol{1}\} \cong \langle a_1, a_2 \mid a_1 a_2 {a_1}^{-1} a_2^{-1}, a_2 \rangle \cong \boldsymbol{Z}$$

【問題 4.10 の解答】 ヒントにある曲面 T^2 上に基点 b をとる。共通部分 $T^2 \cap (\boldsymbol{R}^3 - f(S^1))$ は $S^1 \times (-1,1)$ と同相である。$\boldsymbol{R}^3 - f(S^1)$ 内で $T^2 \cap (\boldsymbol{R}^3 - f(S^1))$ の近傍 U_{12} で $T^2 \cap (\boldsymbol{R}^3 - f(S^1))$ を変形レトラクトにもつものをとる。例えば、U_{12} としては、$\varepsilon < 0.01$ に対し、$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, T^2 \cap (\boldsymbol{R}^3 - f(S^1))) < \varepsilon\, \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, f(S^1))$ となる点の全体をとればよい。$\boldsymbol{R}^3 \setminus T^2$ の有界な成分と U_{12} の和集合を U_1, $\boldsymbol{R}^3 \setminus T^2$ の非有界な成分と U_{12} の和集合を U_2 とする。$\mathrm{Int}(D^2)$ を 2 次元円板の内部とすると、U_1 は、$S^1 \times \mathrm{Int}(D^2)$ と同相であり、$\pi_1(U_1, b) \cong \boldsymbol{Z}$ である。U_2 は、$S^1 \times \mathrm{Int}(D^2) \setminus \{\text{ 1 点 }\}$ と同相である。これは、例えば、この T^2 は原点中心の半径 $\sqrt{3}$ の球面についての反転で不変であり、反転は原点以外の点については、同相であることからわかる。問題 3.14 により、$S^1 \times \mathrm{Int}(D^2) \setminus \{\text{ 1 点 }\}$ の基本群は $S^1 \times \mathrm{Int}(D^2)$ の基本群 $\boldsymbol{Z}$ と同型である。

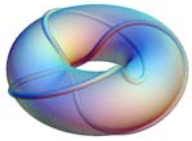


図 10: 問題 4.10 の円周を含むトーラス

さて、$\boldsymbol{Z} \cong \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b) \cong \boldsymbol{Z}$ は、生成元 $a_{12} \in \pi_1(U_{12}, b)$ を $(a_1)^2 \in \pi_1(U_1, b)$ に写す。ここで、a_1 は $\pi_1(U_1, b)$ の生成元である。また、$\boldsymbol{Z} \cong \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_2, b) \cong \boldsymbol{Z}$ は、生成元 $a_{12} \in \pi_1(U_{12}, b)$ を $(a_2)^3 \in \pi_1(U_1, b)$ に写す。ここで、a_2 は $\pi_1(U_2, b)$ の生成元である。従って、次を得る。

$$\pi_1(\boldsymbol{R}^3 \smallsetminus f(S^1), b) \cong \pi_1(U_1, b) \underset{\pi_1(U_{12}, b)}{*} \pi_1(U_2, b) \cong \langle a_1, a_2 \mid (a_1)^2 = (a_2)^3$$

この群 $G = \pi_1(\boldsymbol{R}^3 \smallsetminus f(S^1), b)$ をアーベル化すると、

$$G^{\mathrm{ab}} \cong (\boldsymbol{Z}a_1 \oplus \boldsymbol{Z}a_2)/\boldsymbol{Z}(2a_1 - 3a_2) \cong \boldsymbol{Z}$$

を得る。実際、全射準同型 $h : \boldsymbol{Z}a_1 \oplus \boldsymbol{Z}a_2 \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ を $h(k_1 a_1 + k_2 a_2) = 3k_1 + 2k_2$ で定義すると、$\ker(h) = \boldsymbol{Z}(2a_1 - 3a_2)$ となる。この群 G が可換群でないことは、$\mathcal{S}_3$ を, 3 次対称群（文字 $\{1, 2, 3\}$ の置換群）とし、準同型 $G \longrightarrow \mathcal{S}_3$ を $a_1 \longmapsto (12)$（互換）, $a_2 \longmapsto (123)$（巡回置換）で定義する。これは全射で、$\mathcal{S}_3$ は、可換ではない。従って G は、可換群ではない。