

演習問題9 - 1 . チェイン複体とチェイン写像の短完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{i} & B_2 & \xrightarrow{j} & C_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{i} & B_1 & \xrightarrow{j} & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
 0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{i} & B_0 & \xrightarrow{j} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

があるとする。

(1)  $\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$  が次で定義されることを示せ。

- $c_k \in \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1})$  に対し、 $j$  は全射だから  $j(b_k) = c_k$  となる  $b_k \in B_k$  がとれる。 $j(\partial(b_k)) = \partial(j(b_k)) = 0$  だから、行の系列の完全性から  $i(a_{k-1}) = \partial(b_k)$  となる  $a_{k-1} \in A_{k-1}$  がとれる。 $i(\partial(a_{k-1})) = \partial(i(a_{k-1})) = \partial(\partial(b_k)) = 0$  で、 $i$  は単射だから、 $\partial(a_{k-1}) = 0$  となる。こうして、 $c_k \in \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1})$  に対し、 $a_{k-1} \in \ker(\partial : A_{k-1} \longrightarrow A_{k-2})$  をとり、これにより、 $\partial_* : H_k(C_*) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$  を  $\partial_*[c_k] = [a_{k-1}]$  とする。

((1-1)  $j(b'_k) = c_k$  となる  $b'_k$  も同じ  $H_{k-1}(A_*)$  の元を定めること、(1-2)  $\ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(A_*)$  は準同型となること、(1-3)  $c_k = \partial c_{k+1}$  は  $0 \in H_{k-1}(A_*)$  を定めることを示す。)

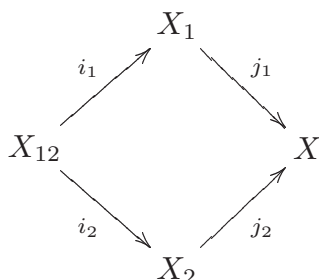
(2) チェイン複体のホモロジー群の長完全系列

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{\partial_*} & H_2(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_2(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_2(C_*) & \\
 \xrightarrow{\partial_*} & H_1(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_1(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_1(C_*) & \\
 \xrightarrow{\partial_*} & H_0(A_*) & \xrightarrow{i_*} & H_0(B_*) & \xrightarrow{j_*} & H_0(C_*) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

が得られることを示せ。

( $\text{im } i_* \subset \ker j_*$ ,  $\text{im } j_* \subset \ker \partial_*$ ,  $\text{im } \partial_* \subset \ker i_*$ ,  $\text{im } i_* \supset \ker j_*$ ,  $\text{im } j_* \supset \ker \partial_*$ ,  $\text{im } \partial_* \supset \ker i_*$  を示す。)

演習問題9 - 2 . 胞体複体  $X$  が2つの胞体複体  $X_1, X_2$  の和集合であり、 $X_{12} = X_1 \cap X_2$  も胞体複体であるとする。(  $X_1, X_2, X_{12}$  は  $X$  の部分複体。 ) このとき、



について、 $C_k(X_{12}) = H_k(X_{12}^{(k)}, X_{12}^{(k-1)})$ ,  $C_k(X_1) = H_k(X_1^{(k)}, X_1^{(k-1)})$ ,  $C_k(X_2) = H_k(X_2^{(k)}, X_2^{(k-1)})$ ,  $C_k(X) = H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  に対し、次のチェイン複体の短完全系列が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_2(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_2(X_1) \oplus C_2(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_2(X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_1(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_1(X_1) \oplus C_1(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_1(X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & C_0(X_{12}) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & C_0(X_1) \oplus C_0(X_2) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & C_0(X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

ここで、

$$\begin{array}{ccc}
 & H_k(X_1^{(k)}, X_1^{(k-1)}) & \\
 & \nearrow i_{1*} & \searrow j_{1*} \\
 H_k(X_{12}^{(k)}, X_{12}^{(k-1)}) & & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \\
 & \searrow i_{2*} & \nearrow j_{2*} \\
 & H_k(X_2^{(k)}, X_2^{(k-1)}) &
 \end{array}$$

を使っている。

- (1) この短完全系列から演習問題 9 - 1 により得られる長完全系列における連結準同型  $\Delta_* : H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(X_{12})$  の定義を  $C_*(X)$ ,  $C_*(X_1)$ ,  $C_*(X_2)$ ,  $C_*(X_{12})$  の言葉で述べよ。
- (2) 演習問題 1 により得られるホモロジー群の長完全系列を書き下せ。これをマイヤー・ビエトリス完全系列と呼ぶ。

演習問題 9 - 3 .  $n$  次元球面  $S^n$  に、 $S^n = S_+^n \cup S_-^n$  について、 $S_+^n, S_-^n, S^{n-1} = S_+^n \cap S_-^n$  が部分胞体複体となる胞体分割を与えよ。演習問題 9 - 2 を用いて、 $S^{n-1}$  のホモロジー群がわかっているときに  $S^n$  のホモロジー群を決定せよ。

問題 9 - 4 . 有限胞体複体  $X, Y$  の間の連続写像  $f : X \rightarrow Y$  の 2 つの胞体近似  $f_0, f_1$  は写像としてホモトピックである。 $f_0, f_1$  の間のホモトピー  $[0, 1] \times X \rightarrow Y$  の胞体近似  $F$  で、 $f_0, f_1$  の間のホモトピーを与えるものがとれる。このとき、 $F_* : C_*([0, 1] \times X) \rightarrow C_*(Y)$  が得られる。

- (1)  $H : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$  を  $H(e_i^k) = F_*((0, 1) \times e_i^k)$  で定義するとき、 $\partial H + H\partial = f_{1*} - f_{0*}$  を示せ。
- (2) チェイン複体  $A_*, B_*$  の間のチェイン写像  $f_0, f_1$  に対し、準同型  $H : A_k \rightarrow B_{k+1}$  で、 $\partial H + H\partial = f_1 - f_0$  となるものがあるとき、 $f_{0*} = f_{1*} : H_k(A_*) \rightarrow H_k(B_*)$  となることを示せ。