10　空間の貼り合わせ

定義 10.1 空間対 (X, A), 連続写像 $\varphi : A \longrightarrow Y$ について、$Z = Y \cup_\varphi X$ を次のような位相空間として定義する。直和 $X \sqcup Y$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \in A$ について、$x \sim \varphi(x)$ となるような最小のものとして定義し、$Z = (X \sqcup Y)/\sim$ とおき、商位相をいれる。$Z = Y \cup_\varphi X$ を X を Y に（X と Y を）$\varphi : A \longrightarrow Y$ で貼りあわせて得られる空間と呼ぶ。$Y \longrightarrow Z$ は単射で像への同相写像あり、これにより、$Y \subset Z$ と考え、空間対 (Z, Y) が定義される。また、$X \setminus A \longrightarrow Z$ も単射で像への同相写像である。

命題 10.2 X, Y がハウスドルフ空間で、A がコンパクト集合、A を含む X の開集合で U で、A へのレトラクションを持つものがあるとする。すなわち連続写像 $r : U \longrightarrow A$ で $r|A = \mathrm{id}_A$ となるものがあるとする。連続写像 $\varphi : A \longrightarrow Y$ について，このとき、X を Y に $\varphi : A \longrightarrow Y$ で貼りあわせて得られる空間 $Z = Y \cup_\varphi X$ は、ハウスドルフ空間となる。

証明　$z_1, z_2 \in Z$ について、$X \sqcup Y$ における代表元 $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2$ がともに $X \setminus A$ の元ならば、X の開集合 U_1, U_2 で、$\widehat{z}_1 \in U_1$, $\widehat{z}_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものがとれるが、$U_1 \cap (X \setminus A)$, $U_2 \cap (X \setminus A)$ の Z における像は $z_1, z_2 \in Z$ を分離する。$\widehat{z}_1, \widehat{z}_2$ がともに Y の元ならば、Y の開集合 V_1, V_2 で、$\widehat{z}_1 \in V_1$, $\widehat{z}_2 \in V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ となるものがとれる。$r^{-1}(\varphi^{-1}(V_1))$, $r^{-1}(\varphi^{-1}(V_2))$ は X の開集合で、$\varphi^{-1}(\widehat{z}_1)$, $\varphi^{-1}(\widehat{z}_2)$ を分離している。$(r^{-1}(\varphi^{-1}(V_1)) \sqcup V_1)/\sim$, $(r^{-1}(\varphi^{-1}(V_2)) \sqcup V_2)/\sim$ は z_1, z_2 を分離する開集合である。$\widehat{z}_1 \in X \setminus A$, $\widehat{z}_2 \in Y$ ならば、まず、A の点 x に対し、$\widehat{z}_1$ と x を分離する開集合 $\widehat{z}_1 \in U_{1x}$, $x \in U_{2x}$ $(U_{1x} \cap U_{2x} = \emptyset$ をとる。A はコンパクトだから、A の有限被覆 $\{U_{2x_i}\}_{i=1,\dots,k}$ がとれる。このとき、$W_1 = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} U_{1x_i}$, $W_2 = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} U_{2x_i}$ は $\widehat{z}_1$ と A を分離する開集合である。Y の開集合 V_2 で $\widehat{z}_2 \in V_2$ となるものがとれる。$W_1/\sim$, $W_2 \cap r^{-1}\varphi^{-1}(V_2) \sqcup V_2)/\sim$ は z_1, z_2 を分離する開集合である。■

【例 10.3】　Y を１点からなる位相空間とする（$Y = \{p\}$）とき、空間対 (X, A) と $c_p : A \longrightarrow \{p\}$ について、$\{p\} \cup_{c_p} X = X/A$ と書き、X において A を１点に縮めた空間と呼ぶ。$D^n/\partial D^n \approx S^n$ である。

命題 10.4 空間対 (X, A) について、A を閉集合とし、X の A を含む開集合 U で，A に X のホモトピーでレトラクトするものがあるとする．すなわち，ホモトピー $F_t : X \longrightarrow X$ で，$F_t(U) \subset U$, $F_t|A = \mathrm{id}_A$, $F_0 = \mathrm{id}_X$, $F_1(U) \subset A$ となるものがあるとする．このとき，$H_*(X, A) \cong H_*(Y \cup_\varphi X, Y)$ となる.

証明　$\mathrm{id}_X : (X, A) \longrightarrow (X, U)$, $F_1 : (X, U) \longrightarrow (X, A)$ について，$\mathrm{id}_X \circ F_1 \simeq \mathrm{id}_{(X,U)}$, $F_1 \circ \mathrm{id}_X \simeq \mathrm{id}_{(X,A)}$ だから，ホモトピー公理から，$H_*(X, A) \cong H_*(X, U)$ である.

$Z = Y \cup_\varphi X$ に対し、ホモトピー $G_t : Z \longrightarrow Z$ を $F_t \sqcup \mathrm{id}_Y : X \sqcup Y \longrightarrow X \sqcup Y$ が誘導する写像として定義する。$F_t|A = \mathrm{id}_A$ だから G_t は矛盾なく定義される．$\mathrm{id}_Z : (Z, Y) \longrightarrow (Z, Y \cup_\varphi U)$, $G_1 : (Z, Y \cup_\varphi U) \longrightarrow (Z, Y)$ について，$\mathrm{id}_Z \circ G_1 \simeq \mathrm{id}_{(Z, Y \cup_\varphi U)}$, $G_1 \circ \mathrm{id}_Z \simeq \mathrm{id}_{(Z,Y)}$ だから，ホモトピー公理から，$H_*(Z, Y) \cong H_*(Z, Y \cup_\varphi U)$ である.

また，切除公理により、$X \supset U \supset A$ について $H_*(X \setminus A, U \setminus A) \cong H_*(X, U)$ である。同様に，切除公理により、$Y \cup_\varphi X \supset Y \cup_\varphi U \supset Y$ について，$H_*((Y \cup_\varphi X) \setminus Y, (Y \cup_\varphi U) \setminus Y) \cong H_*(X \setminus A, U \setminus A)$ である.

従って,

$$\begin{aligned}H_*(X,A) \cong H_*(X,U) &\cong H_*(X\setminus A, U\setminus A)\\ &= H_*((Y\cup_\varphi X)\setminus Y, (Y\cup_\varphi U)\setminus Y)\\ &\cong H_*(Y\cup_\varphi X, Y\cup_\varphi U) \cong H_*(Y\cup_\varphi X, Y)\end{aligned}$$

となる. ■

【例 10.5】 $(X,A) = (D^n, S^{n-1})$ とする。

$$F(t,\boldsymbol{x}) = \begin{cases}(1+t)\boldsymbol{x} & (\|\boldsymbol{x}\| \leqq \dfrac{1}{t+1})\\ \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} & (\|\boldsymbol{x}\| \geqq \dfrac{1}{t+1})\end{cases}$$

は, $U = \{\boldsymbol{x}\in D^n \mid \|\boldsymbol{x}\| > \frac{1}{2}\}$ に対して、命題の条件を満たす。従って、任意の $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow Y$ に対して, $H_k(Y\cup_\varphi X, Y) \cong H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases}\boldsymbol{Z} & (k=n)\\ 0 & (k\neq n)\end{cases}$

11　有限胞体複体

n 次元有限胞体複体を次で定義する。

定義 11.1 0次元胞体複体とは、各点を開集合とする（離散位相を持つ）有限集合のことである。$n-1$ 次元胞体複体が定義されているとする。n 次元胞体複体 $X^{(n)}$ は、$k-1$ 次元胞体複体 $X^{(n-1)}$, および有限個の n 次元円板 $D^n_1, \ldots, D^n_{k(n)}$ の直和と、写像 $\varphi : \coprod_{i=1}^{k(n)} S^{n-1}_i \longrightarrow X^{(n-1)}$ により、$X^{(n)} = X^{(n-1)}\cup_\varphi(\coprod_{i=1}^{k(n)} D^n_i)$ として与えられるものである。$X^{(n)}$ 内の $\mathrm{Int}(D^n_i)$ の像を e^n_i と書き、n（次元）胞体と呼ぶ。

n 次元 $X = X^{(n)}$ の部分空間として $X^{(k)}$ が含まれるが, $X^{(k)}$ を X の k 骨格と呼ぶ。上の定義から、$D^n_i \longrightarrow X^{(n)}$ が得られるが、これを $\iota : D^n_i \longrightarrow X^{(n)}$ と書くことにする。$e^n_i = \iota(\mathrm{Int}(D^n_i)$ であり、$X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup (\bigcup_{i=1}^{k(n)} e^n_i)$ は、$X^{(n)}$ を集合として共通部分を持たない部分集合に分割している。

n 次元胞体複体 $X^{(n)}$ が弧状連結であることと，その 1 骨格 $X^{(1)}$ が弧状連結であることは同値となる。

$x_0 \in X^{(0)}$ を固定する。$X^{(1)}$ が弧状連結と仮定する。このとき，$x_1 \in X^{(1)}$ に対し，曲線 $c : [0,1] \longrightarrow X^{(1)}$ で $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$ となるものがある。以後，$X^{(k)}$ が弧状連結と仮定して、$X^{(k+1)}$ が弧状連結であることを示す。$x_1 \in X^{(k+1)} \setminus X^{(k)}$ に対し、$x_1 \in e^{k+1}_i$ となる $k+1$ 胞体 e^{k+1}_i があり、x_1 は $X^{(k)} \cup_{\varphi^{k+1}_i} D^{k+1}_i$ の点であり、D^{k+1}_i の点 y_1 の像である。D^{k+1}_i 内の線分 $\gamma : [0,1] \longrightarrow D^{k+1}_i$ で $\gamma(0) \in \partial D^{k+1}_i$, $\gamma(1) \in y_1$ となるものをとると，γ は $\underline{\gamma} : [0,1] \longrightarrow X^{(k+1)}$ を定義し，$\underline{\gamma}(0) \in X^{(k)}$, $\underline{\gamma}(1) = x_1$ となる．$X^{(k)}$ は弧状連結と仮定したから，曲線 $c : [0,1] \longrightarrow X^{(k)}$ で $c(0) = x_0$, $c(1) = \underline{\gamma}(0)$ となるものがある。$c\natural\underline{\gamma}$ は $(c\natural\underline{\gamma})(0) = x_0$, $(c\natural\underline{\gamma})(1) = x_1$ を満たす曲線である。従って、$X^{(k+1)}$ は弧状連結である。この結果，$X^{(1)}$ が弧状連結ならば, $X = X^{(n)}$ は弧状連結である。

$X = X^{(n)}$ が弧状連結であると仮定する．$x_1 \in X^{(1)}$ に対し，曲線 $c : [0,1] \longrightarrow X^{(n)}$ で $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$ となるものがある。

このとき、$n \geqq 2$ ならば、$n-1$ 骨格 $X^{(n-1)}$ 上の曲線 γ で $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=x_1$ となるものがあることをしめす。

$n-1$ 骨格 $X^{(n-1)}$ の近傍 U で、$X^{(n-1)}$ に $X^{(n)}$ のホモトピーでレトラクトするものが、例 10.5 の構成により作られる。$X^{(n)}$ を U, $\mathrm{Int}(D_i^n)$ $(i=1, \ldots, k(n))$ で被覆する。この被覆の c による逆像で $[0,1]$ を被覆し，そのルベーグ数を δ とする。$[0,1]$ 区間を $\dfrac{1}{N}<\delta$ の区間に分割する。各小区間の像は U 内にあるか、$\mathrm{Int}(D_i^n)$ にあるかどちらかである。U 内にある $c(\dfrac{j}{N})$ に対し、$r(c(\dfrac{j}{N}))$ を対応させる。$c([\dfrac{j}{N},\dfrac{j+1}{N}])\in U$ ならば，$r(c(\dfrac{j}{N}))$, $r(c(\dfrac{j+1}{N}))$ に対し，$r\circ c|[\dfrac{j}{N},\dfrac{j+1}{N}]$ という $X^{(n-1)}$ 内でつなぐ曲線がある。$c([\dfrac{j}{N},\dfrac{j+1}{N}])\in U$ とならない小区間の和集合の連結成分 $[\dfrac{j}{N},\dfrac{k}{N}]$ は、$c([\dfrac{j-1}{N},\dfrac{j}{N}])\in U$, $c([\dfrac{k}{N},\dfrac{k+1}{N}])\in U$, ある D_i^n に対して，$c([\dfrac{j}{N},\dfrac{k}{N}])\in \mathrm{Int}(D_i^n)$ $r(c(\dfrac{j}{N}))$, $r(c(\dfrac{k}{N}))$ は $\varphi_j^n(\partial D_i^n)$ 上の点であるから、∂D_j^n 上の大円の像によってつながれている。これらの曲線をつないで，$n-1$ 骨格 $X^{(n-1)}$ 上の曲線 γ で $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=x_1$ となるものが得られる。

この議論をくりかえすと、$k\geqq 2$ に対し，曲線 $c:[0,1]\longrightarrow X^{(k)}$ で $c(0)=x_0$, $c(1)=x_1$ となるものがあると仮定すると、$k-1$ 骨格 $X^{(k-1)}$ 上の曲線 γ で $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=x_1$ となるものが得られる。従って、$X^{(1)}$ が弧状連結となる。

12 有限胞体複体のホモロジー群

12.1 1次元胞体複体のホモロジー群

1次元胞体複体 $X=X^{(1)}$ は、頂点の有限集合 $X^{(0)}=\{e_1^0,\ldots,e_{k(0)}^0\}$ および辺の集合 $\{D_1^1,\ldots,D_{k(1)}^1\}$ $(D_i^1\approx[-1,1])$ について、各 D_i^1 の境界 ∂D_i^1 と $X^{(0)}=\{e_1^0,\ldots,e_{k(0)}^0\}$ の点との同一視 $\varphi_i^1:\partial D_i^1\longrightarrow X^{(0)}$ が与えられたものである。

$$X=X^{(0)}\cup_{\coprod\varphi_i^1}(D_1^1\cup\cdots\cup D_{k(1)}^1)=X^{(0)}\cup(e_1^1\cup\cdots\cup e_{k(1)}^1)$$

1次元有限胞体複体 X が連結として、X のホモロジー群を求めよう。

空間対 $(X^{(1)},X^{(0)})$ のホモロジー完全系列

$$\begin{array}{l}\xrightarrow{\partial_*} H_1(X^{(0)})\xrightarrow{i_*} H_1(X^{(1)})\xrightarrow{j_*} H_1(X^{(1)},X^{(0)})\\ \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^{(0)})\xrightarrow{i_*} H_0(X^{(1)})\xrightarrow{j_*} H_0(X^{(1)},X^{(0)})\xrightarrow{j_*} 0\end{array}$$

において，

$$H_*(X^{(0)})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}^{k(0)} & (*=0)\\ 0 & (*\neq 0)\end{cases}$$

例 10.5 により、

$$H_*(X^{(1)},X^{(0)})\cong\bigoplus_{i=1}^{k(1)}H_*(D_i^1,\partial D_i^1)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}^{k(1)} & (*=1)\\ 0 & (*\neq 1)\end{cases}$$

である．$H_0(X^{(0)})$, $H_1(X^{(1)},X^{(0)})$ の生成元を e_i^0, $e_j^1=[D_j^1,\partial D_j^1]$ と書く。$H_0(X^{(0)})=\boldsymbol{Z}e_1^0\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{Z}e_{k(0)}^0$, $H_1(X^{(1)},X^{(0)})=\boldsymbol{Z}e_1^1\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{Z}e_{k(1)}^1$.

次の完全系列から、$H_0(X^{(1)}), H_1(X^{(1)})$ が求まる。

$$0 \xrightarrow{i_*} H_1(X^{(1)}) \xrightarrow{j_*} \bigoplus_{i=1}^{k(1)} \boldsymbol{Z}e_i^1 \xrightarrow{\partial_*} \bigoplus_{i=1}^{k(2)} \boldsymbol{Z}e_i^2 \xrightarrow{i_*} H_0(X^{(1)}) \xrightarrow{j_*} 0$$

準同型 ∂_* を列ベクトルに作用する行列として書くと $k(0)$ 行 $k(1)$ 列の行列で、各列はすべて 0 であるか、または $1, -1$ と $k(0)-2$ 個の 0 がならんでいる。これを良くみると ∂_* の核 $\ker\partial_*$, 像 $\mathrm{im}\,\partial_*$ が求まるはずである.

具体的に計算をしなくても、準同型の性質から次がわかる。まず、$\boldsymbol{Z}e_i^0 = H_0(\{e_i^0\}) \longrightarrow H_0(X^{(1)})$ の像と $\boldsymbol{Z}e_j^0 = H_0(\{e_j^0\}) \longrightarrow H_0(X^{(1)})$ の像は、$\varphi_\ell^1(\partial D_\ell) = \{e_i^0, e_j^0\}$ となる D_ℓ^1 があれば一致する。連結を仮定しているので、$e_1^0, \dots, e_{k(0)}^0$ は，どの 2 点にもいくつかの 1 胞体 e_ℓ^1 をたどる道がある。従って、$H_0(\{e_j^0\}) \longrightarrow H_0(X^{(1)})$ の像は、すべて一致する。従って、$H_0(X^{(0)}) \cong \boldsymbol{Z}$ がわかる。準同型 i_* は $i_*(\sum_{i=1}^{k(0)} m_i e_i^0) = \sum_{i=1}^{k(0)} m_i$ という準同型である。

$\mathrm{rank}(\mathrm{im}\,\partial_*) = \mathrm{rank}(\ker i_*) = k(0)-1$ であり、自由アーベル群の部分群は自由アーベル群で、$\mathrm{rank}(\ker\partial_*) = k(1) - \mathrm{rank}(\mathrm{im}\,\partial_*) = k(1) - k(0) + 1$ だから $H_1(X^{(1)}) \cong \boldsymbol{Z}^{k(1)-k(0)+1}$ がわかる。

こうして、１次元胞体複体のホモロジー群 $H_0(X^{(1)}), H_1(X^{(1)})$ が計算された。

注意 12.1 $H_0(X^{(1)}) \cong \boldsymbol{Z}, H_1(X^{(1)}) \cong \boldsymbol{Z}^{k(1)-k(0)+1}$ は、チェイン複体

$$0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e_1^0 \oplus \dots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(0)}^0 \xleftarrow{\partial_*} \boldsymbol{Z}e_1^1 \oplus \dots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(1)}^1 \longleftarrow 0$$

のホモロジー群である。

12.2 ２次元胞体複体のホモロジー群

２次元胞体複体 X のホモロジー群はどのように計算されるか考えよう。

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= e_1^0 \sqcup \cdots \sqcup e_{k(0)}^0 \\ X^{(1)} &= X^{(0)} \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup \cdots \cup e_{k(1)}^1 \\ X = X^{(2)} &= X^{(1)} \cup_{\varphi^2} (D_1^2 \sqcup \cdots D_{k(2)}^2) \\ &= X^{(1)} \cup e_1^2 \cup e_2^2 \cup \dots \cup e_{k(2)}^2 \end{aligned}$$

のように X はあたえられている。

空間対 $(X^{(2)}, X^{(1)})$ のホモロジー完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial_*} & H_2(X^{(1)}) & \xrightarrow{i_*} & H_2(X^{(2)}) & \xrightarrow{j_*} & H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_1(X^{(1)}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X^{(2)}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X^{(2)}, X^{(1)}) \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_0(X^{(1)}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X^{(2)}) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X^{(2)}, X^{(1)}) \end{array}$$

において，$H_*(X^{(1)})$ は計算されていて，

$$H_*(X^{(2)}, X^{(1)}) \cong \bigoplus_{i=1}^{k(2)} H_*(D_i^2, \partial D_i^2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}^{k(2)} & (* = 2) \\ 0 & (* \neq 2) \end{cases}$$

である.

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(X^{(2)}) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^2 \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_1(X^{(1)}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X^{(2)}) & \xrightarrow{j_*} & 0 \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_0(X^{(1)}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X^{(2)}) & \xrightarrow{j_*} & 0 \end{array}$$

これから，$X^{(1)}$ が弧状連結ならば、$H_0(X^{(2)}) \cong H_0(X^{(1)}) \cong \boldsymbol{Z}$ である。前に述べたように $X^{(1)}$ が弧状連結であることと $X = X^{(2)}$ が弧状連結であることは同値である。

$$0 \xrightarrow{i_*} H_2(X^{(2)}) \xrightarrow{j_*} \boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^2 \xrightarrow{\partial_*} H_1(X^{(1)}) \xrightarrow{i_*} H_1(X^{(2)}) \xrightarrow{j_*} 0$$

において，問題は $\boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^2 \xrightarrow{\partial_*} H_1(X^{(1)})$ の核と像の計算の方法である。

ここに、$(X^{(1)}, X^{(0)})$ の完全列の情報を書き加えると次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
0 \to H_2(X^{(2)}) \to H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \to & & H_1(X^{(1)}) & & \to H_1(X^{(2)}) \to 0 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & H_0(X^{(0)}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & H_0(X^{(1)}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

ここで、

$$H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \longrightarrow H_1(X^{(1)}) \longrightarrow H_1(X^{(1)}, X^{(0)})$$

の合成写像 ∂ を考えると，$\partial : \boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^2 \longrightarrow \boldsymbol{Z}e_1^1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(1)}^1$ が得られ，その核が $H_2(X^{(2)})$ となる。その像で $H_1(X^{(1)})$ の商をとって $H_1(X^{(2)})$ が得られるが、$H_1(X^{(1)}) \cong \ker(H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \longrightarrow H_0(X^{(0)}))$ だから、$H_1(X^{(2)}) \cong \dfrac{\ker(H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \longrightarrow H_0(X^{(0)}))}{\mathrm{im}(H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \longrightarrow H_1(X^{(1)}, X^{(0)}))}$ となっている。

ここで、$\partial : \boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^2 \longrightarrow \boldsymbol{Z}e_1^1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(1)}^1$ を列ベクトルに作用する行列で表すと、その ij 成分は $\deg(\partial D_j^2 \longrightarrow D_i^1/\partial D_i^1)$ で与えられる。ただし、$D_i^1/\partial D_i^1 \approx X^{(1)}/(X^{(1)} \setminus \mathrm{Int}\, e_i^1)$ と考えている。

注意 12.2　2 次元胞体複体に対し、チェイン複体

$$0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e_1^0 \oplus ... \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(0)}^0 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}e_1^1 \oplus ... \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(1)}^1 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus ... \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^2 \xleftarrow{\partial} 0$$

が対応し、そのチェイン複体の完全系列からのずれをはかるホモロジー群が 2 次元胞体複体のホモロジー群である。

【例 12.3】　(1) 2 次元球面 S^2. $S^2 = e^0 \cup e^2$ という胞体複体の表示をもつ。このときのチェイン複体は

$$0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e^0 \xleftarrow{\partial_*} 0 \xleftarrow{\partial_*} \boldsymbol{Z}e^2 \xleftarrow{\partial_*} 0$$

であり、$H_k(S^2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0, 2) \\ 0 & (k \neq 0, 2) \end{cases}$ を得る。$S^2 = (e_1^0 \cup e_2^0) \cup (e_1^1 \cup e_2^1) \cup (e_1^2 \cup e_2^2)$ という胞体複体の表示をもつ。

$$0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e_1^0 \oplus \boldsymbol{Z}e_2^0 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \boldsymbol{Z}e_1^1 \oplus \boldsymbol{Z}e_2^1 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus \boldsymbol{Z}e_2^2 \xleftarrow{\partial_*} 0$$

となり、同じホモロジー群を得る。

(2) 射影平面 $\boldsymbol{R}P^2$. $\boldsymbol{R}P^2 = e^0 \cup e^1 \cup e^2$ という胞体複体の表示をもつ。このときのチェイン複体は

$$0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e^0 \xleftarrow{0} \boldsymbol{Z}e^1 \xleftarrow{2} \boldsymbol{Z}e^2 \longleftarrow 0$$

であり、$H_k(\boldsymbol{R}P^2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} & (k=1) \\ \boldsymbol{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0,1) \end{cases}$ を得る。

(3) 2 次元トーラス T^2. $\boldsymbol{R}P^2 = e^0 \cup (e^1_1 \cup e^1_2) \cup e^2$ という胞体複体の表示をもつ。このときのチェイン複体は

$$0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e^0 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}} \boldsymbol{Z}e^1_1 \oplus \boldsymbol{Z}e^1_2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \boldsymbol{Z}e^2 \longleftarrow 0$$

であり、$H_k(T^2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k=0,2) \\ \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & (k=1) \\ 0 & (k \neq 0,1,2) \end{cases}$ を得る。

(4) クライン・ボトル K. $K = e^0 \cup (e^1_1 \cup e^1_2) \cup e^2$ という胞体複体の表示をもつ。このときのチェイン複体は

$$0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e^0 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}} \boldsymbol{Z}e^1_1 \oplus \boldsymbol{Z}e^1_2 \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \boldsymbol{Z}e^2 \longleftarrow 0$$

であり、$H_k(T^2) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} & (k=1) \\ \boldsymbol{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0,1) \end{cases}$ を得る。

12.3 3 次元胞体複体のホモロジー群

$$\begin{aligned} X = X^{(3)} &= X^{(2)} \cup_{\varphi^3} (D^3_1 \sqcup \cdots D^3_{k(3)}) \\ &= X^{(2)} \cup e^3_1 \cup e^3_2 \cup \ldots \cup e^3_{k(3)} \end{aligned}$$

のように X はあたえられている。

空間対 $(X^{(3)}, X^{(2)})$ のホモロジー完全系列

$$\begin{array}{cccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & H_3(X^{(2)}) & \xrightarrow{i_*} & H_3(X^{(3)}) & \xrightarrow{j_*} & H_3(X^{(3)}, X^{(2)}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_2(X^{(2)}) & \xrightarrow{i_*} & H_2(X^{(3)}) & \xrightarrow{j_*} & H_2(X^{(3)}, X^{(2)}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(X^{(2)}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X^{(3)}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X^{(3)}, X^{(2)}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(X^{(2)}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X^{(3)}) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X^{(3)}, X^{(3)})
\end{array}$$

において，$H_*(X^{(2)})$ は計算されていて，

$$H_*(X^{(3)}, X^{(2)}) \cong \bigoplus_{i=1}^{k(3)} H_*(D^3_i, \partial D^3_i) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}^{k(3)} & (*=3) \\ 0 & (* \neq 2) \end{cases}$$

である.

従って、$H_k(X^{(3)}) \cong H_k(X^{(2)})$ $(k = 0,\, 1)$ であり、$H_2(X^{(3)})$, $H_3(X^{(3)})$ については完全系列

$$0 \xrightarrow{i_*} H_3(X^{(3)}) \xrightarrow{j_*} \boldsymbol{Z}^{k(3)} \xrightarrow{\partial_*} H_2(X^{(2)}) \xrightarrow{i_*} H_2(X^{(3)}) \xrightarrow{j_*} 0$$

を得る。

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & & & & \\
 & \downarrow & & & & \\
 & H_3(X^{(3)}) & & & & \\
 & \downarrow & & & & \\
 & H_3(X^{(3)},X^{(2)}) & & 0 & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & H_2(X^{(2)}) & \to H_2(X^{(2)},X^{(1)}) \to & H_1(X^{(1)}) & \to H_1(X^{(2)}) \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & H_2(X^{(3)}) & & H_1(X^{(1)},X^{(0)}) & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & & H_0(X^{(0)}) & & \\
 & & & \downarrow & & \\
 & & & H_0(X^{(1)}) & & \\
 & & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

注意 12.4　$X^{(3)}$ のホモロジー群は、チェイン複体

$$
\begin{aligned}
0 \longleftarrow \boldsymbol{Z}e_1^0 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(0)}^0 &\xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}e_1^1 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(1)}^1 \\
&\xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}e_1^2 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^2 \xleftarrow{\partial} \boldsymbol{Z}e_1^3 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}e_{k(2)}^3 \xleftarrow{\partial} 0
\end{aligned}
$$

のホモロジー群として求まる。

このように，胞体複体のホモロジー群の計算をしようとすると、胞体を生成元とする自由加群とその間の準同型写像 ∂ の列が定義され，$\partial \circ \partial = 0$ を満たしているが、完全系列ではない。このような系列はチェイン複体と呼ばれ，それが完全系列からどれだけ離れているかは $\ker \partial / \operatorname{im} \partial$ によりはかられる。この群が、1 次元、2 次元、3 次元の胞体複体については、ホモロジー群に一致していることが、上の計算からからわかる。次節で、このようなチェイン複体、チェイン複体のホモロジー群をきちんと定義する。

13　チェイン複体、そのホモロジー群

定義 13.1 (チェイン複体 (chain complex)) 整数 k に対して定まるアーベル群 A_k と準同型 $\partial_k : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ からなる系列

$$
C_* : \cdots \xleftarrow{\partial_{k-1}} C_{k-1} \xleftarrow{\partial_k} C_k \xleftarrow{\partial_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{\partial_{k+2}} \cdots
$$

が、チェイン複体であるとは $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$，すなわち $\operatorname{im} \partial_{k+1} \subset \ker \partial_k$ が任意の整数 k に対して成立することである。C_k の元を、しばしば k（次元）チェインと呼ぶ。また，∂_k を境界準同型あるいは境界作用素と呼ぶ。

定義 13.2 (複体のホモロジー群) チェイン複体 $C_* : \cdots \xleftarrow{\partial_{k-1}} C_{k-1} \xleftarrow{\partial_k} C_k \xleftarrow{\partial_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{\partial_{k+2}} \cdots$ の k 次元ホモロジー群 H_k を $H_k = \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$ で定義する。$Z_k = \ker h_k$ の元を、k（次元）サイクル、$B_k = \operatorname{im} h_{k+1}$ の元を、k（次元）バウンダリーと呼ぶ。k 次元サイクル c を代表元とする H_k の元 $[c]$ を c のホモロジー類と呼ぶ。

14　胞体複体のチェイン複体

14.1　n 次元胞体複体のチェイン複体

$X = X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_{\varphi^n} (D_1^n \sqcup \cdots \sqcup D_{k(n)}^n = X^{(n-1)} \cup (e_1^n \cup \cdots \cup e_{k(n)}^n)$ に対して、空間対 $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ のホモロジー完全系列を書くと以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow{\partial_*} H_n(X^{(n-1)}) \xrightarrow{i_*} H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_*} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})\\
&\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^{(n)}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{(n)}, X^{(n-1)})\\
&\xrightarrow{\partial_*} H_{n-2}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{i_*} H_{n-2}(X^{(n)}) \xrightarrow{j_*} H_{n-2}(X^{(n)}, X^{(n-1)})\\
&\xrightarrow{\partial_*} \cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \xrightarrow{j_*} H_1(X^{(n)}, X^{(n-1)})\\
&\xrightarrow{\partial_*} H_0(X^{(n-1)}) \xrightarrow{i_*} H_0(X^{(n)}) \xrightarrow{j_*} H_0(X^{(n)}, X^{(n-1)})
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
H_*(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \bigoplus_{i=1}^{k(n)} H_*(D_i^n, \partial D_i^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}^{k(n)} & (* = n) \\ 0 & (* \neq n) \end{cases}
$$

である. 従って、$k = 0, \ldots, n-2$ に対して、$H_k(X^{(n)}) \cong H_k(X^{(n-1)})$ である。また、$H_{n-1}(X^{(n)})$, $H_n(X^{(n)})$ について完全系列

$$
\begin{aligned}
0 &\xrightarrow{i_*} H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_*} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})\\
&\qquad \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^{(n)}) \xrightarrow{j_*} 0
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、$X^{(n-1)}$ についても次の同様の完全系列が得られている。

$$
\begin{aligned}
0 &\xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})\\
&\qquad \xrightarrow{\partial_*} H_{n-2}(X^{(n-2)}) \xrightarrow{i_*} H_{n-2}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{j_*} 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & 0 & \\
 & \downarrow & \\
0 \to H_n(X^{(n)}) \to H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \to & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \to H_{n-1}(X^{(n)}) \to 0\\
 & \downarrow & \\
 & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \\
 & \downarrow & \\
 & H_{n-2}(X^{(n-2)}) & \\
 & \downarrow & \\
 & H_{n-2}(X^{(n-1)}) & \\
 & \downarrow & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & & \\
 & \downarrow & & & \\
 & H_n(X^{(n)}) & & & \\
 & \downarrow & & & \\
 & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H_{n-1}(X^{(n-1)}) & \to H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \to & H_{n-2}(X^{(n-2)}) & \to H_{n-2}(X^{(n-1)}) \to 0\\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & H_{n-1}(X^{(n)}) & & H_{n-2}(X^{(n-2)}, X^{(n-3)}) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & H_{n-3}(X^{(n-3)}) & \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & H_{n-3}(X^{(n-2)}) & \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

結局、胞体複体 $X = X^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)}$, に対し、$C_\ell(X) = H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)})$,

$$\begin{aligned}\partial = j_* \circ \partial_* : C_\ell(X) = H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) &\longrightarrow H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}) \\ &\longrightarrow H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}, X^{(\ell-2)}) = C_{\ell-1}(X)\end{aligned}$$

として、チェイン複体,

$$0 \xleftarrow{\partial} C_0(X) \xleftarrow{\partial} C_1(X) \xleftarrow{\partial} C_2(X) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

が定まった。ここで、

$$C_\ell(X) = H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) \cong \bigoplus_{i=1}^{k(\ell)} H_\ell(D_i^\ell, \partial D_i^\ell) = \bigoplus_{i=1}^{k(\ell)} \boldsymbol{Z}[D_i^\ell, \partial D_i^\ell] = \bigoplus_{i=1}^{k(\ell)} \boldsymbol{Z} e_i^\ell$$

は自由加群である。$\partial : C_\ell(X) \longrightarrow C_{\ell-1}(X)$ は行列で表され、その ij 成分は

$$\partial D_i^\ell \xrightarrow{(\varphi_X)_i^\ell} X^{(\ell-1)} \xrightarrow{f} X^{(\ell-1)}/(X^{(\ell-1)} \setminus e_j^{\ell-1}) \approx D_j^{\ell-1}/\partial D_j^{\ell-1} \approx S^{\ell-1}$$

の写像度で与えられる。

14.2 符号の問題

$H_{n-1}(S^{n-1})$ の生成元 $[S^{n-1}]$, $H_n(D^n, S^{n-1})$ の生成元 $[D^n, S^{n-1}]$ は順に定められたものである。

n 次元立方体 I^n は、$\{e_0^0, e_1^0, e^1\}^n$ の元に対応する 3^n 個の胞体からなる胞体複体の構造を持つ。

正方形 $[0,1]^2$ に対してその胞体分割は $\{e_0^0, e_1^0, e^1\}^2$, すなわち

$$\begin{aligned}&(e_0^0 \times e_0^0 \cup e_1^0 \times e_0^0 \cup e_0^0 \times e_1^0 \cup e_1^0 \times e_1^0) \\ &\cup(e^1 \times e_0^0 \cup e^1 \times e_1^0 \cup e_0^0 \times e^1 \cup e_1^0 \times e^1) \\ &\cup e^1 \times e^1\end{aligned}$$

で与えられる。これを

$$(\{e_0^0, e_1^0\} \times \{e_0^0, e_1^0\}) \cup (e^1 \times \{e_0^0, e_1^0\} \cup \{e_0^0, e_1^0\} \times e^1) \cup e^1 \times e^1$$

と書こう。ここで、

$$\begin{aligned}\partial(e^1 \times e_0^0) &= e_1^0 \times e_0^0 - e_0^0 \times e_0^0, \quad \partial(e^1 \times e_1^0) = e_1^0 \times e_1^0 - e_0^0 \times e_1^0, \\ \partial(e_0^0 \times e^1) &= e_0^0 \times e_1^0 - e_0^0 \times e_0^0. \quad \partial(e_1^0 \times e^1) = e_1^0 \times e_1^0 - e_1^0 \times e_0^0\end{aligned}$$

が、1 胞体に対する生成元の自然なとり方である。これに対して、

$$\partial(e^1 \times e^1) = e_1^0 \times e^1 - e_0^0 \times e^1 - e^1 \times e_1^0 + e^1 \times e_0^0$$

これは、

$$\partial(e^1 \times e^1) = (\partial e^1) \times e^1 - e^1 \times (\partial e^1)$$

と書かれる。

立方体 $[0,1]^3$ に対してその胞体分割は $\{e_0^0, e_1^0, e^1\}^3$, すなわち

$$\begin{aligned}&(\{e_0^0, e_1^0\} \times \{e_0^0, e_1^0\} \times \{e_0^0, e_1^0\}) \\ &\cup(e^1 \times \{e_0^0, e_1^0\} \times \{e_0^0, e_1^0\} \cup \{e_0^0, e_1^0\} \times e^1 \times \{e_0^0, e_1^0\} \cup \{e_0^0, e_1^0\} \times \{e_0^0, e_1^0\} \times e^1) \\ &\cup(\{e_0^0, e_1^0\} \times e^1 \times e^1 \cup e^1 \times \{e_0^0, e_1^0\} \times e^1 \cup e^1 \times e^1 \times \{e_0^0, e_1^0\}) \\ &\cup e^1 \times e^1 \times e^1\end{aligned}$$

ここで、1 胞体に対して、

$$\begin{aligned}\partial(e^1\times e^0_{i_2}\times e^0_{i_3}) &= (\partial e^1)\times e^0_{i_2}\times e^0_{i_3},\\ \partial(e^0_{i_1}\times e^1\times e^0_{i_3}) &= e^0_{i_1}\times(\partial e^1)\times e^0_{i_3},\\ \partial(e^0_{i_1}\times e^0_{i_2}\times e^1) &= e^0_{i_1}\times e^0_{i_2}\times(\partial e^1)\end{aligned}$$

と定める。2 胞体に対しては、それぞれの正方形に対して座標の順に定まる生成元を対応させれば、次のようになる。

$$\begin{aligned}\partial(e^0_{i_1}\times e^1\times e^1) &= e^0_{i_1}\times(\partial e^1)\times e^1 - e^0_{i_1}\times e^1\times(\partial e^1),\\ \partial(e^1\times e^0_{i_2}\times e^1) &= (\partial e^1)\times e^0_{i_2}\times e^1 - e^1\times e^0_{i_2}\times(\partial e^1),\\ \partial(e^1\times e^1\times e^0_{i_3}) &= (\partial e^1)\times e^1\times e^0_{i_3} - e^1\times(\partial e^1)\times e^0_{i_1}\end{aligned}$$

これにより、$H_1(I^3)\cong 0$ も確かめられる。3 胞体に対しては

$$\partial(e^1\times e^1\times e^1) = (\partial e^1)\times e^1\times e^1 - e^1\times(\partial e^1)\times e^1 + e^1\times e^1\times(\partial e^1)$$

と定めると、$[D^3,S^2]$ の定義と同じになる。(球面のホモロジー群の生成元は空間対 (S^n,S^n_-) ($S^n_- = \{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1} \mid x_1\leqq 0\}$) のホモロジー完全系列内の同型 $H_n(S^n)\cong H_n(S^n,S^n_-)$ と、切除同型 $H_n(D^n,\partial D^n)\cong H_n(S^n,S^n_-)$ により定める。)

n 次元立方体 I^n は、$\{e^0_0,e^0_1,e^1\}^n$ の元に対応する 3^n 個の胞体からなる胞体複体の構造に対し、

$$\partial(e^1\times\cdots\times e^1) = (\partial e^1)\times\cdots\times e^1 - e^1\times(\partial e^1)\times\cdots\times e^1 + \cdots + (-1)^{n-1}e^1\times\cdots\times e^1\times(\partial e^1)$$

となる。

I^n は $\{e^0,e^{n-1},e^n\}$ という胞体複体の構造を持つ。∂I^n の胞体分割について、$\{e^0_0,e^0_1,e^1\}^n\setminus\{e^1\times\cdots\times e^1\}$ から $\{e^0,e^{n-1}\}$ への胞体写像が、$e^0_1\times e^1\times\cdots\times e^1\mapsto e^{n-1}$, 他の元は e^0 に写す形で定まる。これは、$\{e^0_0,e^0_1,e^1\}^n$ から、$\{e^0,e^{n-1},e^n\}$ への胞体写像に拡張する。これにより、$H_n(\partial I^n)$ の生成元 $[\partial I^n]$ は、$e^0_1\times e^1\times\cdots\times e^1\mapsto e^{n-1}$ の像として定まっていたから、$\{e^0,e^{n-1}\}$ のチェイン複体における $[e^{n-1}]$ に一致する。さらに、$\partial e^n = e^{n-1}$ が $\partial_*([I^n,\partial I^n]) = [\partial I^n]$ を誘導することがわかる。

$I^p\times I^q$ について、空間として $\partial(I^p\times I^q) = (\partial I^p\times I^q)\cup(I^q\times\partial I^q)$ であるが、$\{e^0_0,e^0_1,e^1\}^{p+q}$ という胞体分割のチェイン複体では

$$\begin{aligned}\partial(e^1\times\cdots\times e^1) &= \partial(\overbrace{e^1\times\cdots\times e^1}^{p})\times(\overbrace{e^1\times\cdots\times e^1}^{q})\\ &\quad+(-1)^{p-1}(\overbrace{e^1\times\cdots\times e^1}^{p})\times\partial(\overbrace{e^1\times\cdots\times e^1}^{q})\end{aligned}$$

となる。$I^p=\{e^0,e^{p-1},e^p\}$, $I^q=\{e^0,e^{p-1},e^q\}$ を上のようにとると、

$$\begin{aligned}\partial(e^p\times e^q) &= (\partial e^p)\times e^q + (-1)^{p-1}e^p\times(\partial e^q)\\ &= e^{p-1}\times e^q + (-1)^{p-1}e^p\times e^{q-1}\end{aligned}$$

となる。

胞体写像 $\{e^0_0,e^0_1,e^1\}^{p+q}\longrightarrow\{e^0,e^{p-1},e^p\}\times\{e^0,e^{p-1},e^q\}$ が、

$$\begin{aligned}(e^1)^p\times(e^1)^q &\longmapsto e^p\times e^q,\\ e^0_1\times(e^1)^{p-1}\times(e^1)^q &\longmapsto e^{p-1}\times e^q,\\ (e^1)^p\times e^0_1\times(e^1)^{q-1} &\longmapsto e^p\times e^{q-1},\\ e^0_1\times(e^1)^{p-1}\times(q'\ \text{胞体}\ (q'<q)) &\longmapsto e^{p-1}\times e^0,\\ (p'\ \text{胞体}\ (p'<p))\times e^0_1\times(e^1)^{q-1} &\longmapsto e^0\times e^{p-1},\\ (\text{これら以外の胞体}) &\longmapsto e^0\times e^0\end{aligned}$$

により定まる。この胞体写像が誘導するチェイン写像がチェイン複体の境界準同型と可換であることから、$\partial(e^p \times e^q)$ が定まる。

15 n 次元胞体複体のホモロジー群

n 次元有限胞体複体 X のホモロジー群は、有限生成自由加群からなるチェイン複体 $C_*(X)$ のホモロジー群であることがわかった。

15.1 チェイン複体 $C_*(X)$ の境界準同型の標準形

有限生成自由加群からなるチェイン複体 $C_* : 0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} 0$ に対して、$C_0, C_1, \ldots, C_n$ の基底を代数的に取り替えて ∂ の表示を簡単にすることができる。

すなわち、$\partial : C_\ell \longrightarrow C_{\ell-1}$ は $k_{\ell-1}$ 行 k_ℓ 列の整数係数の行列で表されているから、行列基本変形を行えば、次の形の行列で書かれる。

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & e_r & & & \\ & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ここで $e_1, e_2, \ldots, e_r$ は $e_1|e_2|\cdots|e_{r-1}|e_r$ （e_1 は e_2 の約数, $\ldots$, e_{r-1} は e_r の約数）を満たす自然数であり、$\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}$ は $k_{\ell-1} - r$ 行 $k_\ell - r$ 列の零行列である。$e_1, e_2, \ldots, e_r$ のうちの最初の p_ℓ 個は 1, 残りの $q_\ell = r - p$ 個を m_1^ℓ, $\ldots$, $m_{q_\ell}^\ell$ として、行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & & & & \\ & & & m_1^\ell & \cdots & 0 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 0 & \cdots & m_{q_\ell}^\ell & & & \\ & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$m_1^\ell|m_2^\ell|\cdots|m_{q_\ell}^\ell$ のように書かれる。このように行列を書く基底により、$C_\ell = \boldsymbol{Z}^{k(\ell)} = \boldsymbol{Z}^{p_\ell} \oplus \boldsymbol{Z}^{q_\ell} \oplus \boldsymbol{Z}^{k_\ell - (p_\ell + q_\ell)}$ と書き、$C_{\ell-1} = \boldsymbol{Z}^{k(\ell-1)} = \boldsymbol{Z}^{p_\ell} \oplus \boldsymbol{Z}^{q_\ell} \oplus \boldsymbol{Z}^{k_{\ell-1} - (p_\ell + q_\ell)}$ と書くと、

$$\begin{aligned} \ker \partial &= \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus \boldsymbol{Z}^{k_\ell - (p_\ell + q_\ell)} \subset \boldsymbol{Z}^{k_\ell}, \\ \operatorname{im} \partial &= \boldsymbol{Z}^{p_\ell} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q_\ell} m_i^\ell \boldsymbol{Z} \oplus \mathbf{0} \subset \boldsymbol{Z}^p \oplus \boldsymbol{Z}^{q_\ell} \oplus \boldsymbol{Z}^{k_{\ell-1} - (p_\ell + q_\ell)} \subset \boldsymbol{Z}^{k_{\ell-1}} \end{aligned}$$

である。

チェイン複体 C_* においては、$\partial\circ\partial=0$ すなわち $\mathrm{im}(\partial: C_{\ell+1}\longrightarrow C_\ell)\subset \ker(\partial: C_\ell\longrightarrow C_{\ell-1})$ であるから、$C_\ell=\boldsymbol{Z}^{k_\ell}=\boldsymbol{Z}^p\oplus\boldsymbol{Z}^q\oplus\boldsymbol{Z}^{k(\ell)-(p+q)}$ においては、

$$\mathrm{im}(\partial: C_{\ell+1}\longrightarrow C_\ell)\subset \mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\oplus\boldsymbol{Z}^{k_\ell-(p_\ell+q_\ell)}=\ker(\partial: C_\ell\longrightarrow C_{\ell-1})$$

である。この $\mathbf{0}\oplus\mathbf{0}\oplus\boldsymbol{Z}^{k_\ell-(p_\ell+q_\ell)}=\ker(\partial: C_\ell\longrightarrow C_{\ell-1})$ における基底を取り替えて、$\partial: C_{\ell+1}\longrightarrow \ker(\partial: C_\ell\longrightarrow C_{\ell-1}))$ を表す行列が上の形の $k_{\ell+1}$ 行 $k_\ell-(p_\ell+q_\ell)$ 列の行列に書かれる。

$$\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\
0 & \cdots & 1 & & & & & & \\
 & & & m_1^{\ell+1} & \cdots & 0 & & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
 & & & 0 & \cdots & m_{q_{\ell+1}}^{\ell+1} & & & \\
 & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

従って、ホモロジー群は

$$H_\ell(C_*)\cong \boldsymbol{Z}^{k_\ell-(p_\ell+q_\ell)-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})}\oplus\bigoplus_{i=1}^{q_{\ell+1}}\boldsymbol{Z}/m_i^{\ell+1}\boldsymbol{Z}$$

となる。

15.2 有限胞体複体のオイラー標数

さて、n 次元有限胞体複体 X のオイラー標数（オイラー・ポアンカレ標数）を $\chi(X)=\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell k(\ell)$ で定義する。

このとき、$\chi(X)=\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell\,\mathrm{rank}(H_\ell(X))$ となる。

実際、$\partial: C_k\longrightarrow C_{k-1}$ について、$0\longleftarrow \mathrm{im}\,\partial\xleftarrow{\partial} C_k\longleftarrow\ker\partial\longleftarrow 0$ に対して $\mathrm{rank}(C_k)=\mathrm{rank}(\mathrm{im}\,\partial)+\mathrm{rank}(\ker\partial)$ である。従って、$0\xleftarrow{\partial_0} C_0\xleftarrow{\partial_1} C_1\xleftarrow{\partial_2}\cdots\xleftarrow{\partial_n} C_n\xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$ に対して、$\mathrm{rank}(H_\ell(X))=\mathrm{rank}(\ker\partial_\ell/\,\mathrm{im}\,\partial_{\ell+1})=\mathrm{rank}(\ker\partial_\ell)-\mathrm{rank}(\mathrm{im}\,\partial_{\ell+1})$ だから、

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell\,\mathrm{rank}(H_\ell(X)) &= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell(\mathrm{rank}(\ker\partial_\ell)-\mathrm{rank}(\mathrm{im}\,\partial_{\ell+1}))\\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell(\mathrm{rank}(\ker\partial_\ell)+\mathrm{rank}(\mathrm{im}\,\partial_\ell))\\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell\,\mathrm{rank}(C_k(X))\\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell k(\ell)=\chi(X)
\end{aligned}$$

15.3 体を係数とするホモロジー群

前の小節におけるオイラー数の計算は有限生成アーベル群のランクの計算であった。自由加群からなるチェイン複体に対して、ホモロジー群が、自由部分加群 $\ker\partial$, $\mathrm{im}\,\partial$ の商として得られ、そのランクはランクの差であることを用いている。このようなランクの計算は、線形空間に対してはより明快である。$\partial : \boldsymbol{Z}^{k_\ell} \cong C_\ell \longrightarrow C_{\ell-1} \cong \boldsymbol{Z}^{k_{\ell-1}}$ は整数係数の行列で表されているので、それが作用する空間は線形空間 $\boldsymbol{R}^{k_\ell} \longrightarrow \boldsymbol{R}^{k_{\ell-1}}$ と考えても問題はない。また、実際の応用では、素数 p に対して p 個の元からなる有限体 $\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ と考えると（特に $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ と考えると) 便利なことが多い。

自由加群からなるチェイン複体 $C_* : 0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} 0$ $(C_\ell \cong \boldsymbol{Z}^{k_\ell})$ と体 $\boldsymbol{K}$ に対して、$C_* \otimes \boldsymbol{K} : 0 \xleftarrow{\partial} C_0 \otimes \boldsymbol{K} \xleftarrow{\partial} C_1 \otimes \boldsymbol{K} \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n \otimes \boldsymbol{K} \xleftarrow{\partial} 0$ を $C_\ell \otimes \boldsymbol{K} \cong \boldsymbol{K}^{k_\ell}$ について、（行列で書けば同じ）∂ により定義される系列とする（$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ に対しては ∂ は同じ行列で書かれ、$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{F}_p$ に対しては $\partial \mod p$ となる）。ここで $\otimes$ は後で説明するテンソル積の記号である。

このような体上の線形空間に対しては、∂ を表す行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち $r_\ell^{\boldsymbol{K}}$ 次の単位行列と $k_\ell - r_\ell^{\boldsymbol{K}}$ 行 $k_\ell - r_{\ell-1}^{\boldsymbol{K}}$ 列の零行列の直和となる。従って、前々小節の議論から

$$H_\ell(C_* \otimes \boldsymbol{K}) \cong \boldsymbol{K}^{k_\ell - r_\ell^{\boldsymbol{K}} - r_{\ell+1}^{\boldsymbol{K}}}$$

となる。この群を $H_\ell(X; \boldsymbol{K})$ と書き、$\boldsymbol{K}$ 係数のホモロジー群と呼ぶ。一般のアーベル群 A に対しても同様に群 $H_\ell(X; A) = H_\ell(C_*(X) \otimes A$ がさだまり、A 係数のホモロジー群と呼ばれる。$H_\ell(X; \boldsymbol{Z}) = X_\ell(X)$ である。

ここで、$\dim_{\boldsymbol{K}} H_\ell(C_* \otimes \boldsymbol{K})$ と $\mathrm{rank}\, H_\ell(C_*)$ は一般には異なる。しかし、前小節のオイラー標数の計算から、$\chi(X) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \dim_{\boldsymbol{K}}(H_\ell(X))$ となる。

16 胞体写像

２つの胞体複体に対して、その間の連続写像 f が誘導するホモロジー群の準同型はどのようにして求められるかを考えよう。

胞体複体に対しては、胞体写像を考えるのが自然である。m 次元有限胞体複体

$$X = X^{(m)} \supset X^{(m-1)} \supset \cdots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)},$$
$$X^{(\ell)} = X^{(\ell-1)} \cup_{\varphi_X^\ell} (D_1^\ell \sqcup \cdots \sqcup D_{k_X(\ell)}^\ell),\ (\ell = 1,\ \ldots, m),$$

n 次元有限胞体複体

$$Y = Y^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots \supset Y^{(1)} \supset Y^{(0)},$$
$$Y^{(\ell)} = Y^{(\ell-1)} \cup_{\varphi_Y^\ell} (D_1^\ell \sqcup \cdots \sqcup D_{k_Y(\ell)}^\ell),\ (\ell = 1,\ \ldots,\ n)$$

が与えられているとする。

定義 16.1 (胞体写像) 胞体複体 $X = X^{(m)} \supset X^{(m-1)} \supset \cdots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)}$, $Y = Y^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots \supset Y^{(1)} \supset Y^{(0)}$ の間の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ は、$f(X^{(\ell)}) \subset Y^{(\ell)}$, $(\ell = 1, \ldots, m)$ が成り立つとき胞体写像であると呼ぶ。

胞体写像 f は, 胞体複体のチェイン複体 $C_\ell(X) = H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)})$, $C_\ell(Y) = H_\ell(Y^{(\ell)}, Y^{(\ell-1)})$ の間の準同型写像 f_* を誘導する。実際、連続写像 f の ℓ 骨格 $X^{(\ell)}$ への制限はは、連続写像 $f|X^\ell : (X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) \longrightarrow (Y^{(\ell)}, Y^{(\ell-1)})$ であり、準同型写像 $(f|X^{(\ell)})_* : H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) \longrightarrow H_\ell(Y^{(\ell)}, Y^{(\ell-1)})$ を誘導する。この準同型写像が $C_*(X)$, $C_*(Y)$ の境界準同型 ∂ と可換であることが、次の可換図式からわかる。

$$\begin{array}{ccccc}
H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}) & \xrightarrow{j_*} & H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}, X^{(\ell-2)}) \\
\big\downarrow (f|X^{(\ell)})_* & & \big\downarrow (f|X^{(\ell-1)})_* & & \big\downarrow (f|X^{(\ell-1)})_* \\
H_\ell(Y^{(\ell)}, Y^{(\ell-1)}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{\ell-1}(Y^{(\ell-1)}) & \xrightarrow{j_*} & H_{\ell-1}(Y^{(\ell-1)}, Y^{(\ell-2)})
\end{array}$$

このように、チェイン複体の境界準同型と可換な準同型をチェイン・マップ（チェイン準同型）と呼ぶ。チェイン・マップはホモロジー群の準同型を導く。今の場合で言うと、$\ker(\partial : C_\ell(X) \longrightarrow C_{\ell-1}(X))$ の元 c に対し、$\partial(f_* c) = f_*(\partial c) = 0$ だから、$f_* c \in \ker(\partial : C_\ell(Y) \longrightarrow C_{\ell-1}(Y))$ である。また、$b = \partial a \in \mathrm{im}(\partial : C_{\ell+1}(X) \longrightarrow C_\ell(X))$ に対し、$f_* b = f_*(\partial a) = \partial(f_* a)\,\mathrm{im}(\partial : C_{\ell+1}(Y) \longrightarrow C_\ell(Y))$ であるから、$H_\ell(X) \longrightarrow H_\ell(Y)$ が誘導される。

f_* を具体的に書くと

$$C_\ell(X) = H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) = \bigoplus_{i=1}^{k_X(\ell)} \boldsymbol{Z} e_i^\ell = \bigoplus_{i=1}^{k_X(\ell)} \boldsymbol{Z}[D_i^\ell, \partial D_i^\ell],$$

$$C_\ell(Y) = H_\ell(Y^{(\ell)}, Y^{(\ell-1)}) = \bigoplus_{i=1}^{k_Y(\ell)} \boldsymbol{Z} e_i^\ell = \bigoplus_{j=1}^{k_Y(\ell)} \boldsymbol{Z}[D_j^\ell, \partial D_j^\ell]$$

として、胞体写像 f は

$$(D_i^\ell, \partial D_i^\ell) \xrightarrow{((e_X)_i^\ell, (\varphi_X)_i^\ell)} (X^\ell, X^{\ell-1}) \xrightarrow{f} (Y^\ell, Y^{\ell-1}) \longrightarrow (Y^\ell, Y^\ell \backslash (e_Y)_j^\ell)$$

を誘導するから、連続写像 $D_i^\ell/\partial D_i^\ell \longrightarrow D_j^\ell/\partial D_j^\ell$ が得られる。f_* は行列で表され、その ij 成分は $D_i^\ell/\partial D_i^\ell \longrightarrow D_j^\ell/\partial D_j^\ell$ の写像度で与えられる。

17 胞体近似定理

有限胞体複体 X, Y の間の連続写像は、ホモロジー理論の公理によりホモロジー群の準同型を導く。次の定理により、その連続写像とホモトピックな胞体写像が存在する。胞体写像が胞体複体のチェイン複体の間のチェイン・マップを誘導し、それが誘導するホモロジー群の準同型と見ることができる。

定理 17.1 有限胞体複体 X, Y の間の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ は、胞体写像にホモトピックである。

証明は、f を胞体分割に対して、ホモトピーで変形していくことにより与えられる。

$$X = X^{(m)} \supset X^{(m-1)} \supset \cdots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)},$$
$$Y = Y^{(n)} \supset Y^{(n-1)} \supset \cdots \supset Y^{(1)} \supset Y^{(0)}$$

とする。

胞体近似定理の証明の中で、次の補題が必要になる。

補題 17.2 $K \subset U \subset \overline{U} \subset V \subset \boldsymbol{R}^m$, U, V は開集合、$K, \overline{U}$ はコンパクト集合とする。任意の連続写像 $f : V \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対し、K の近傍上で滑らかあるいは区分的に線形な写像 $\overline{f}$ で, $\overline{f}|(V \setminus U) = f|(V \setminus U)$, $\sup_V \|\overline{f} - f\| < \varepsilon$ となるものが存在する。

証明　f は V 上で一様連続であるから、ε に対し、$\delta > 0$ で $\|x - y\| < \delta$ ならば、$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ となるものが存在する。さらに $4\delta < \mathrm{dist}(K, \boldsymbol{R}^n \setminus U)$ とする。

滑らかな関数を得るためには C^∞ 級関数 $\mu(x)$ で $\mathrm{supp}(\mu) \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| < \delta,\ \int_{\boldsymbol{R}^n} \mu(x)\, \mathrm{d}\, x_1 \cdots \mathrm{d}\, x_n = 1$ となるものをとる。

$$\overline{f}(x) = \int \mu(x - y) f(y)\, \mathrm{d}\, y_1 \cdots \mathrm{d}\, y_n$$

と置く。$\overline{f}(x)$ は K の 3δ 近傍で定義され、C^∞ 級である。また、

$$\begin{aligned}\|\overline{f}(x) - f(x)\| &= \|\int \mu(x - y)(f(y) - f(x))\, \mathrm{d}\, y_1 \cdots \mathrm{d}\, y_n\| \\ &= \int \mu(x - y)\|f(y) - f(x))\|\, \mathrm{d}\, y_1 \cdots \mathrm{d}\, y_n \\ &\leqq \int \mu(x - y)\varepsilon\, \mathrm{d}\, y_1 \cdots \mathrm{d}\, y_n = \varepsilon\end{aligned}$$

である。

$$\nu(x) = \min\{\max\{0, \frac{\mathrm{dist}(x, K)}{\delta} - 1\}, 1\}$$

とすると ν は K の δ 近傍で 0, 2δ 近傍の外で 1 となる連続関数である。$(1 - \nu(x))\overline{f}(x) + \nu(x) f(x)$ を改めて $\overline{f}$ とすればこれが求める C^∞ 級写像である。

区分線形な関数を得るためには、U を辺が座標軸に平行で長さが δ の立方体に分割する。ただし、$4\sqrt{n}\delta < \mathrm{dist}(K, \boldsymbol{R}^n \setminus U)$ とする。その頂点になる点を格子点と呼ぶ。更に立方体を単体に分割する。$[0, 1]^n$ に対しては、$1 \cdots n$ の置換 σ に対して、

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \mid 1 \geqq x_{\sigma(1)} \geqq \cdots \geqq x_{\sigma(n)} \geqq 0\}$$

のように分割し、U の分割はこれに相似に行う。

U 上の格子点 x に $f(x)$ を対応させる写像を単体上にアフィン写像として拡張すると、区分線形な写像が得られるが、K の 3δ 近傍に交わる単体の頂点は U 内にあるので、この区分線形写像 $\overline{f}$ は K の $3\sqrt{n}\delta$ 近傍上で定義されている。x を含む単体の頂点を x_0, $\dots$, x_n とすると、$x = \sum_{i=0}^{n} t_i x_i$ $(t_i \geqq 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1)$ であり、

$$\begin{aligned}\|\overline{f}(x) - f(x)\| &= \|\sum_{i=0}^{n} t_i f(x_i) - (\sum_{i=0}^{n} t_i) f(x)\| \\ &= \|\sum_{i=0}^{n} t_i (f(x_i) - f(x))\| \\ &\leqq \sum_{i=0}^{n} t_i \|f(x_i) - f(x))\| \\ &\leqq \sum_{i=0}^{n} t_i \varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

となる。

$$\nu(x)=\min\{\max\{0,\frac{\mathrm{dist}(x,K)}{\sqrt{n}\delta}-2\},1\}$$

とすると ν は K の $2\sqrt{n}\delta$ 近傍で 0, $3\sqrt{n}\delta$ 近傍の外で 1 となる連続関数である。$(1-\nu(x))\overline{f}(x)+\nu(x)f(x)$ を改めて $\overline{f}$ とすればこれが求める区分線形写像である。 ■

胞体近似定理の証明のために、まず、特別な場合を考える。

補題 17.3 $m<n$ とし、m 次元胞体複体 X から n 次元胞体複体 Y への写像が $f:X\longrightarrow Y$ が $f(X^{(m-1)})\subset Y^{(m-1)}$ を満たしているとき、$f=f_0\simeq f_1:X\longrightarrow Y$, $f_1(X^{(m)})\subset Y^{(m)}$ とできる。

$f|D_i^m:D_i^m\longrightarrow Y^{(n)}$ $(n>m)$ とする。$D_{j,r}^n$ を D_j^n 内の原点を中心とする半径 r の閉球体とする。f を $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{k_Y(n)}(f|D_i^m)^{-1}(D_{j,1/2}^n)$ の近傍でホモトピーで変形して、$f|D_i^m:D_i^m\longrightarrow Y^{(n-1)}$ にできることをいう。$\displaystyle\bigcup_{j=1}^{k_Y(n)}(f|D_i^m)^{-1}(D_{j,1/2}^n)\subset \mathrm{Int}\,D_i^m$ について、$(f|D_i^m)^{-1}(D_{j,1/2}^n)$ の近傍 U_j で、互いに交わらず、$f(U_j)\subset D_{j,2/3}^n$ となるものが取れる。U_j において、$f|D_i^m$ をホモトピーで変形して、$(f|D_i^m)^{-1}(D_{j,1/2}^n)$ では、区分線形あるいは滑らかな写像にすることができる。ホモトピーで変形すると、$y_j^n\in D_{j,1/2}^n$ で $f|D_i^m$ の像に含まれないものが存在する。従って、

y_j^n を用いて、$y\in D_j^n$ に対して、y_j^n, y, $y'\in\partial D_j^n$ となるように y' をとる。これにより、ホモトピー $h_t:Y^{(n-1)}\cup(e_j^n\setminus\{y_j^n\})\longrightarrow Y^{(n-1)}\cup(e_j^n\setminus\{y_j^n\})$ が $h_t(y)=(1-t)y+ty'$ により定まる。

このようなホモトピーは各 U_j について同時に作ることができる。従って、$h_t:Y^{(n-1)}\cup(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{k(n)}(e_j^n\setminus\{y_j^n\}))\longrightarrow Y^{(n-1)}\cup(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{k(n)}(e_j^n\setminus\{y_j^n\}))$ で、h_1 の像が $Y^{(n-1)}$ に含まれるものがある。このとき、$h_1\circ(f|D_i^m)$ の像は $Y^{(n-1)}$ に含まれる。

この操作を、すべての D_i^m に対して行って $f|X^{(m)}$ とホモトピックな写像で $X^{(m)}$ の像が $Y^{(n-1)}$ に含まれるものが構成される。

さらに、この議論を、$f:X^{(m)}\longrightarrow Y^{(n-1)}$, $\dots$, $f:X^{(m)}\longrightarrow Y^{(m+1)}$ に対して繰り返して、補題の f_1 が得られる。

定理の証明のためには、f を次の手順で変形する。$f|X^{(0)}:X^{(0)}\longrightarrow Y$ について、$f_0^{(0)}=f|X^{(0)}$, $f_1^{(0)}:X^{(0)}\subset Y^{(0)}$ となるようにホモトピー $f_t^{(0)}$ をつくる。$f_t^{(0)}$ を $f_t^0:X\longrightarrow Y$ に拡張する。

$f_1^0|X^{(1)}\longrightarrow Y$ について、$f_0^{(1)}=f_1^0|X^{(0)}$, $f_1^{(1)}:X^{(1)}\subset Y^{(1)}$ となるようにホモトピー $f_t^{(1)}$ をつくる。$f_t^{(1)}$ を $f_t^1:X\longrightarrow Y$ に拡張する。

こうして、$f_1^\ell:X\longrightarrow Y$ で、$f_1^\ell(X^{(\ell)})\subset Y^{(\ell)}$ となるものができているとき、$f_1^\ell|(X^{(\ell+1)})\subset Y$ について、$f_0^{(\ell+1)}=f_1^\ell|X^{(\ell+1)}$, $f_1^{(\ell+1)}:X^{(\ell+1)}\subset Y^{(\ell+1)}$ となるようにホモトピー $f_t^{(\ell+1)}$ をつくる。$f_t^{(\ell+1)}$ を $f_t^1:X\longrightarrow Y$ に拡張する。

こうして、定理が証明される。

ホモトピーを拡張できるのは次の補題による。この補題を用いれば、$f_t^{(\ell+1)}$ は順に次元の高い骨格上のホモトピーに拡張される。

補題 17.4 $X^{(k)}$ 上のホモトピーは、$X^{(k+1)}$ のホモトピーに拡張される。X のホモトピーに拡張される。

連続写像 $f_0 : D^k \longrightarrow Y$ について、$f_0|\partial D^k$ のホモトピー $f : [0,1]\times\partial D^k \longrightarrow Y$, $f(0,x) = f_0(x)$ $(x \in \partial D^k)$ が与えられているとする。f を拡張する f_0 のホモトピー $F : [0,1] \times \partial D^k \longrightarrow Y$, $F(0,x) = f_0(x)$ $(x \in D^k)$ が存在することを示せばよい。

$F(t,x) = \begin{cases} f_0((1+t)x) & (1+t)\|x\| \leqq 1 \\ f(t, x/\|x\|) & (1+t)\|x\| \geqq 1 \end{cases}$ と置けばよい。

こうして胞体近似定理が示された。

$f : X \longrightarrow Y$ の 2 つの胞体近似 f_0, f_1 は写像としてホモトピックである。$[0,1] \times X$ は、X の胞体 D^ℓ_j に対し、$\{0\} \times D^\ell_j$, $\{1\} \times D^\ell_j$, $[0,1] \times D^\ell_j$ を胞体とする胞体分割を持つ。

$F : [0,1] \times X$ の胞体近似 F_1 で、$F_1|\{0\} \times X = f_0$, $F_1|\{1\} \times X = f_1$ とするものが取れる。F_1 を F と書き直す。

$F_* : C_*([0,1] \times X) \longrightarrow C_*(Y)$ が得られる。また、$i_0 : X \longrightarrow \{0\} \times X \subset [0,1] \times X$, $i_1 : X \longrightarrow \{1\} \times X \subset [0,1] \times X$ も得られる。

$F_*(i_0)_* = (f_0)_*$, $F_*(i_1)_* = (f_1)_*$ である。

ここで、$F_*((0,1)\times e^\ell_j) \in H^{\ell+1}(Y^{(\ell+1)}, Y^{(\ell)}) = C_{\ell+1}(Y)$ であるが、$\partial F_*((0,1)\times e^\ell_j) - F_*((0,1) \times \partial e^\ell_j) = F_*(i_0)_*(e^\ell_j) - F_*(i_1)_*(e^\ell_j) = (f_0)_*(e^\ell_j) - (f_1)_*(e^\ell_j)$ となる。

$H : C_\ell(K) \longrightarrow C_{\ell+1}(K)$ を $H(e^\ell_j) = F_*(e^\ell_j)$ で定める。$(f_0)_* - (f_1)_* = \partial H + H\partial$ をみたす。この H を $(f_0)_*$ と $(f_1)_*$ の間のチェインホモトピーと呼ぶ。チェインホモトピーがあると、ホモロジー群において $(f_0)_* = (f_1)_*$ となる。

18　n 次元胞体複体のホモロジー群

n 次元有限胞体複体 X のホモロジー群は、有限生成自由加群からなるチェイン複体 $C_*(X)$ のホモロジー群であることがわかった。逆に、有限生成自由加群からなるチェイン複体 $C_* : 0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} 0$ が与えられると、$C_*(X) = C_*$ となるような n 次元有限胞体複体 X が定義されるかどうかを考えよう。これは、$H_0(C_*) \cong \boldsymbol{Z}$ という場合は可能である。まず、$X^{(1)}$ については、C_0, C_1 の基底を取り替えて、$\partial : C_1 \longrightarrow C_0$ は行列 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ で表される。このときの C_0 の基底を $e^0_1, \ldots, e^0_{k_0}$, C_1 の基底を $e^1_1, \ldots, e^1_{k_1}$ とする。C_0 の基底を $e^0_1+e^0_{k_0}, \ldots, e^0_{k_0-1}+e^0_{k_0}, e^0_{k_0}$ に取り替えると行列は $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ で表される。この行列に対応する 1 次元胞体複体は、頂点 $e^0_1, \ldots, e^0_{k_0}$, 辺 $e^1_1, \ldots, e^1_{k_1}$ をもち、$\varphi^1_i(-1) = e^0_{k_0}$, $\varphi^1_i(1) = \begin{cases} e^0_i & (i < k_0) \\ e^0_{k_0} & (i \geqq k_0) \end{cases}$ で与えられる。$X^{(n-1)}$ が定義されているとき、$\varphi^n_i : \partial D^n_i \longrightarrow X^{(n-1)}$ で結合写像 $\varphi^n_i : \partial D^n_i \longrightarrow X^{(n-1)} \longrightarrow D^{n-1}_j/\partial D^{n-1}_j$ の写像度が与えられた整数になるものを構成する。

$X^{(n-1)}$ は弧状連結だから、$X^{(0)}$ の１点 $e^0_{k_0}$ と $\iota(D^{n-1}_j)$ に含まれる $X^{(0)}$ の点 e^0_ℓ を結ぶ曲線 γ_j が取れる。$\iota b_j = e^0_j$ となる $b_j \in \partial D^{n-1}_j$ をとり、$f_{ij} : (D^{n-1}, \partial D^{n-1}) \longrightarrow (D^{n-1}_j, b_j)$ で $\deg(f_{ij} : (D^{n-1}, \partial D^{n-1}) \longrightarrow (D^{n-1}_j, \partial D^{n-1}_j)$ が、$\partial : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ を表す行列の ij 成分 ∂_{ij} に等しいものをとる。$\gamma_{j\#}f_{ij} : (D^{n-1}, \partial D^{n-1}) \longrightarrow (X^{(n-1)}, e^0_{k_0})$ について $D^{n-1} \approx I^{n-1}$ と同一視して、それらの和 $(\gamma_{1\#}f_{i1})\natural\cdots\natural\gamma_{k_{n-1}\#}f_{ik_{n-1}})$ を $\partial D^n = I^{n-1}/\partial I^{n-1}$ からの写像とみたものを $\varphi^n_i : \partial D^n \longrightarrow X^{(n-1)}$ と置く。そうすると、$\varphi^n = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{k_n} \varphi^n_i$ により定義する $X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_{\varphi^n} (D^n_1 \sqcup \cdots \sqcup D^n_{k_n})$ は n 次元胞体複体であり、それの定義するチェイン複体は、C_* に一致する。

まず、$\varphi^n_i : \partial D^n_i \longrightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-2)}$ を与えたとき、$\varphi^n_i : \partial D^n_i \longrightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-3)}$

注意 18.1　チェイン複体に対し、それを与える胞体複体のホモトピー型は一意ではない。すなわちホモトピー同値ではない２つの胞体複体が、同じチェイン複体を与える例はたくさんある。