

2008年度幾何学特別演習II 問題 12月17日

演習問題 11 - 1 . 有限胞体複体  $X, Y$  の直積について、 $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$  を示せ。

演習問題 11 - 2 .  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$  は  $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  に作用する。  $A$  のホモロジー群  $H_0(T^2), H_1(T^2), H_2(T^2)$  への作用  $A_*$  を求めよ。

演習問題 11 - 3 .  $X$  を  $S^1 \times D^2$  と微分同相な  $S^3$  の部分集合とする。  $S^3 - \text{Int}X$  のホモロジー群を求めよ。ここで、 $\text{Int}X = X - \partial X$  とする。

問題 11 - 4 . 2つの  $n$  次元多様体  $M_1, M_2$  に対しそれらの連結和を次のように定義する。  $M_1, M_2$  に含まれる  $n$  次元閉球体を  $D_1, D_2$  とし

$$M_1 \# M_2 = (M_1 - \text{Int}D_1) \sqcup (M_2 - \text{Int}D_2) / \sim$$

但し、 $x \in \partial(M_1 - \text{Int}D_1) = \partial D_1 \cong S^{n-1}$ ,  $y \in \partial(M_2 - \text{Int}D_2) = \partial D_2 \cong S^{n-1}$  に対し、 $x \sim y \iff x = \bar{y} \left( \overline{(y_1, y_2, \dots, y_n)} = (-y_1, y_2, \dots, y_n) \right)$  とする。  $M_1 \# M_2$  の整数係数ホモロジー群を  $M_1, M_2$  の整数係数ホモロジー群であらわせ。

問題 11 - 5 .  $A : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$  を  $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z})$  の  $\mathbf{R}^2$  への作用から引き起こされる同相写像とすると、次の空間の整数係数ホモロジー群を計算せよ。

$$X = (D^2 \times S^1)_1 \sqcup (D^2 \times S^1)_2 / \sim$$

但し、 $x \in \partial(D^2 \times S^1)_1 \cong \partial D^2 \times S^1$ ,  $y \in \partial(D^2 \times S^1)_2 \cong \partial D^2 \times S^1$  に対し、 $x \sim y \iff x = A(y)$  とする。

問題 11 - 6 . (1)  $g \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  に対し、2次元多様体でホモロジー群が  $H_2 \cong \mathbf{Z}$ ,  $H_1 \cong \mathbf{Z}^{2g}$ ,  $H_0 \cong \mathbf{Z}$  となるものを構成せよ。

(2)  $g \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  に対し、2次元多様体でホモロジー群が  $H_2 \cong 0$ ,  $H_1 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^g$ ,  $H_0 \cong \mathbf{Z}$  となるものを構成せよ。

問題 11 - 7 .  $G$  を有限生成有限アーベル群とする。  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  とする。3次元多様体  $M$  で、 $H_3(M) \cong \mathbf{Z}$ ,  $H_2(M) \cong \mathbf{Z}^k$ ,  $H_1(M) \cong \mathbf{Z}^k \oplus G$ ,  $H_0(M) \cong \mathbf{Z}$  となるものを構成せよ。