２００８年度幾何学特別演習 II　問題　　１０月１５日

演習問題３－１． $D^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$, $S^1 = \partial D^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, 基点を $b=(1,0)$ とし，包含写像を $i:(S^1,b) \longrightarrow (D^2,b)$ とする。
$i_*:\pi_1(S^1,b) \longrightarrow \pi_1(D^2,b)$ を考えて，連続写像 $r:D^2 \longrightarrow S^1$ で、$r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ となるものが存在しないことを示せ。

演習問題３－２． $D^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$ とし、$f:D^2 \longrightarrow D^2$ を連続写像とする。$f(x,y)=(x,y)$ となる点 (x,y) が存在すること（ブラウアーの固定点定理）を以下の手順で示せ。
すべての $(x,y) \in D^2$ に対し、$f(x,y) \neq (x,y)$ と仮定する。$(x',y') \in S^1 = \partial D^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ を、(x',y'), (x,y), $f(x,y)$ が直線上にこの順序で並ぶようにとる。写像 $r(x,y)=(x',y')$ について演習問題３－１の結果をつかう。

位相空間 X, Y に対して、連続写像 $f:X \longrightarrow Y$, $g:Y \longrightarrow X$ であって、$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ を満たすものがあるとき、X と Y は同じホモトピー型を持つといい、$X \simeq Y$ と書く。X と Y はホモトピー同値であるとも言う。f(または g) のことをホモトピー同値（写像）と呼び、このとき g(または f) を f(または g) のホモトピー逆写像と呼ぶ。

演習問題３－３． 位相空間の間のホモトピー同値という関係 $\simeq$ は位相空間全体の上で同値関係であることを示せ。

演習問題３－４．

$$\begin{aligned} X = \quad & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \left((x^2+y^2)^{1/2}-2\right)^2 + z^2 = 1\} \\ & \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y=0, (x-2)^2+z^2 \leqq 1\} \\ Y = \quad & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x+1)^2+y^2+z^2=1\} \\ & \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y=0, (x-1)^2+z^2=1\} \end{aligned}$$

とする。X, Y を図示せよ。X, Y はホモトピー同値であることを示せ。写像の構成が難しければ写像の構成の仕方を図によって説明せよ。

演習問題３－５．

(1) $\mathbf{R}^2 - \{\text{two points}\}$ と $S^1 \times S^1 - \{\text{one point}\}$ は同じホモトピー型を持つことを示せ。

(ヒント：ともに $S^1 \vee S^1$ と同じホモトピー型を持つことを示せ。$S^1 \vee S^1$ は２つの基点をもつ円周の基点を同一視して得られる空間である。)

(2) ジョルダンの閉曲線定理を用いて $\mathbf{R}^2 - \{\text{two points}\}$ と $S^1 \times S^1 - \{\text{one point}\}$ は同相でないことを示せ。

ジョルダンの閉曲線定理とは「平面上の単純閉曲線（円周の連続な単射による像）Γ の補集合は2つの弧状連結成分 U, V をもち、$\Gamma = \overline{U} \setminus U$, $\Gamma = \overline{V} \setminus V$」というものである。

問題３－６． 写像 $f : S^1 \cong \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$f(\theta) = \big(\cos(2\theta)\{2+\cos(3\theta)\}, \sin(2\theta)\{2+\cos(3\theta)\}, \sin(3\theta)\big)$$

で定める。　像 $f(S^1)$ を図示せよ。$\mathbf{R}^3 - f(S^1)$ の基本群を求めよ。この群のアーベル化は何か。
(ヒント: $\{(x,y,z) \mid \big((x^2+y^2)^{1/2}-2\big)^2 + z^2 = 1\}$ という曲面に注目する。ファン・カンペンの定理を使う。)
時間のある人は次の問題を考えてみて下さい。
上の問題の $\mathbf{R}^3 - f(S^1)$ の基本群が $\mathbf{Z}$ と異なること、つまり可換群でないことはどうすればわかるか。

問題３－７． n 次元立方体 I^n から m 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ の開集合 U への連続写像 $f : I^n \longrightarrow U$ を考える。この f に対し、ある実数 ε が存在し、$g : I^n \longrightarrow U$ が $\sup_{t \in I^n} \|g(t) - f(t)\| < \varepsilon$ を満たす連続写像ならば、$(1-s)g(t) + sf(t) \in U$ となることを示せ。

問題３－８． n 次元立方体 I^n について、その境界を ∂I^n とする。m 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ の開集合 U とその上の点 $b \in U$ について、写像 $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ を考える。$f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな滑らかな写像 $g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$, $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな区分線形な写像 $\overline{f} : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ が存在することを示せ。ただし、区分線形な写像とは、I^n を n 単体に分割できて、各単体の上では１次写像（アフィン写像）であるような連続写像のことである。

問題３－９． $k < n-1$ ならば、$\pi_k(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}, b_{\mathbf{R}^n \setminus \{0\}}) \cong 0$ であることを示せ。
$k < n$ ならば、$\pi_k(S^n, b_{S^n}) \cong 0$ であることを示せ。

資料． ファン・カンペンの定理の証明

$X = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 は開集合で、U_1, U_2, $U_{12} = U_1 \cap U_2$ は弧状連結とする。基点 $b \in U_{12} = U_1 \cap U_2$ をとり、包含写像を $i_1 : U_{12} \longrightarrow U_1$, $i_2 : U_{12} \longrightarrow U_2$ とし、これにより誘導される準同型写像を $i_{1*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_1, b)$, $i_{2*} : \pi_1(U_{12}, b) \longrightarrow \pi_1(U_2, b)$ とする。次の群の完全列があることを示す。

$$1 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b) \longrightarrow \pi_1(X, b) \longrightarrow 1$$

ここで、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ は群の自由積、$\mathcal{N}$ は、$\pi_1(U_1, b) * \pi_1(U_2, b)$ の部分集合 $\{i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(U_{12}, b)\}$ を含む最小の正規部分群である。（このように定義される群は融合積と呼ばれ、$\pi_1(U_1, b) \underset{\pi_1(U_{12}, b)}{*} \pi_1(U_2, b)$ と書かれる。）

証明。

(1)　$f : ([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ に対し、$f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$ に対するルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、$[0, 1]$ 区間を N 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$f(\dfrac{m}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$f(\dfrac{m}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_m を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。$f|[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] = f_m$ とおいて、

$$f \simeq f_1 \natural \overline{\gamma_1} \natural \gamma_1 \natural f_2 \natural \overline{\gamma_2} \natural \gamma_2 \natural f_3 \natural \overline{\gamma_3} \natural \dots \natural \gamma_{N-1} \natural f_N$$

とすると $\gamma_{m-1} \natural f_m \natural \overline{\gamma_m}$ は U_1 または U_2 のループである。これから自由積からの全射があることがわかる。

(2)　自由積として得られた $f : ([0, 1], \{0, 1\}) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, b)$ が b への定値写像にホモトピックとすると、写像 $F : [0, 1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ で、$F(1, t) = f(t)$, $F(0, t) = b$, $F(s, 0) = F(s, 1) = b$ をみたすものが存在する。$F^{-1}(U_1)$, $F^{-1}(U_2)$ についてのルベーグ数を考えると、十分大きな自然数 N に対し、正方形 $[0, 1]^2$ を N^2 等分すると、$[\dfrac{m-1}{N}, \dfrac{m}{N}] \times [\dfrac{n-1}{N}, \dfrac{n}{N}]$ の像は U_1 または U_2 に含まれる。$F(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N})$ が $U_1 \setminus U_{12}$, $U_2 \setminus U_{12}$, U_{12} の点の時、$F(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N})$ と b を結ぶ曲線 γ_{mn} を U_1, U_2, U_{12} 内に取る。この γ_{mn} を使って、F をホモトピーで変形して、$G(\dfrac{m}{N}, \dfrac{n}{N}) = b$ となる写像 $G : [0, 1]^2 \longrightarrow U_1 \cup U_2$ をつくる。$G(1, t) = f_{N1} \natural \dots \natural f_{NN}$ の f_{Nn} は、$\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の元を表すが、この書き方は、もとの f を $\pi_1(U_1, b)$ または $\pi_1(U_2, b)$ の関係式で書き換えたものである。（$[f]$ と自由積の中で同じ元である。）
小正方形は U_1, U_2 のいずれかに写されるから、隣り合う小正方形の共通部分となる辺は、小正方形がともに U_1 または U_2 に写されれば、U_1 または U_2 に写され、一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、U_{12} に写される。このとき、この辺に対応する $\alpha \in \pi_1(U_{12}, b)$ をとると、U_1 に写る正方形の側では、この元を $\pi_1(U_1, b)$ の元と見た $i_{1*}\alpha$ と書き、U_2 に写る正方形の側では、$\pi_1(U_2, b)$ の元と見た $i_{2*}\alpha$ と書いているはずである。

図のように、辺からの写像に、それぞれの小正方形の側から名前が付けられているとする。f_{mn}, g_{mn}, h_{mn}, k_{mn} は、それぞれ小正方形の写る先の $\pi_1(U_1,b)$ または $\pi_1(U_2,b)$ の元を表す。
小正方形によるホモトピーによって、$f_{mn}\simeq\overline{k_{m,n-1}}\natural g_{m-1,n}\natural h_{mn}$ であるが、これは小正方形が写される U_1, U_2 の基本群 $\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式である。一方、$h_{m,n}\natural\overline{k_{m,n}}$, $\overline{f_{m,n}}\natural g_{m,n}$ は、その辺の両側が、ともに U_1 または U_2 に写されていれば、$\pi_1(U_1,b)$, $\pi_1(U_2,b)$ のなかの関係式であるが、その辺の一方が U_1、他方が U_2 に写されるときには、その辺のあらわす $\alpha\in\pi_1(U_{12},b)$ を使って $i_{1*}\alpha(i_{2*}\alpha)^{-1}$ の形にかかれている。
次のように変形すると、$f_{N1}\natural f_{N2}\natural\cdots\natural f_{NN}$ は $g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\cdots\natural g_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$
\begin{aligned}
& f_{N1}\natural f_{N2}\natural\cdots\natural f_{NN} \\
\simeq\ & (g_{N-1,1}\natural h_{N1})\natural(\overline{k_{N1}}\natural g_{N-1,2}\natural h_{N2})\natural\cdots\natural(\overline{k_{N,N-1}}\natural g_{N-1,N}) \\
=\ & g_{N-1,1}\natural(h_{N1}\natural\overline{k_{N1}})\natural g_{N-1,2}\natural h_{N2}\natural\cdots\natural(h_{N,N-1}\natural\overline{k_{N,N-1}})\natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\cdots\natural g_{N-1,N} \\
& \quad\natural\overline{g_{N-1,2}\natural\cdots\natural g_{N-1,N}}\natural(h_{N1}\natural\overline{k_{N1}})\natural g_{N-1,2}\natural\cdots\natural g_{N-1,N} \\
& \quad\natural\overline{g_{N-1,3}\natural\cdots\natural g_{N-1,N}}\natural\cdots \\
& \quad\natural\overline{g_{N-1,N}}\natural(h_{N,N-1}\natural\overline{k_{N,N-1}})\natural g_{N-1,N}
\end{aligned}
$$

さらに次のように変形すると、$g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\cdots\natural g_{N-1,N}$ は $f_{N-1,1}\natural f_{N-1,2}\natural\cdots\natural f_{N-1,N}$ に $\mathcal{N}$ の元を掛けたものである事がわかる。

$$
\begin{aligned}
& g_{N-1,1}\natural g_{N-1,2}\natural\cdots\natural g_{N-1,N} \\
\simeq\ & f_{N-1,1}\natural f_{N-1,2}\natural\cdots\natural f_{N-1,N} \\
& \quad\natural\overline{f_{N-1,2}\natural\cdots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,1}}\natural g_{N-1,1})\natural f_{N-1,2}\natural\cdots\natural f_{N-1,N} \\
& \quad\natural\overline{f_{N-1,3}\natural\cdots\natural f_{N-1,N}}(\overline{f_{N-1,2}}\natural g_{N-1,2})\natural f_{N-1,3}\natural\cdots\natural f_{N-1,N}\natural\cdots \\
& \quad\natural(\overline{f_{N-1,N}}\natural g_{N-1,N})
\end{aligned}
$$

これを続けると、$g_{1,1}\natural g_{1,2}\natural\cdots\natural g_{1,N}$ は b への定値写像で単位元を表すから、もとの元は $\mathcal{N}$ の元であったことがわかる。