２００８年度幾何学特別演習 II　問題　　10月1日

演習問題１－１（ホモトピー群の定義）.

閉区間 $[0,1]$ を I で表す。n 次元立方体 $I^n = \overbrace{I \times \cdots \times I}^{n} = [0,1]^n$ の内部は、閉区間 $(0,1)$ の直積 $(0,1)^n$ であり、境界は $\partial I^n = [0,1]^n \setminus (0,1)^n$ である。基点付きの位相空間 (X, b_X) に対し、空間対 $(I^n, \partial I^n)$ からの連続写像の全体 $\mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ を考える。
$f_1,\ f_2 \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$f_1 \natural f_2$ を次で定義する。

$$(f_1 \natural f_2)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{if} \quad t_1 \in [0, \dfrac{1}{2}] \\ f_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{if} \quad t_1 \in [\dfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

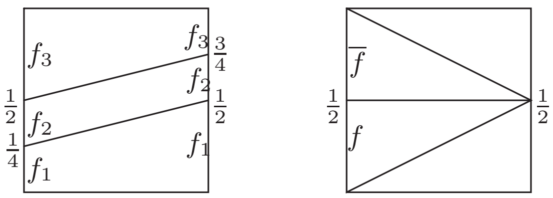
空間対の写像のホモトピー類の集合 $[(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ を $\pi_n(X, b_X)$ と書く。
$\pi_n(X, b_X) = [(I^n, \partial I^n), (X, b_X)]$ の元の演算 $(\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto \alpha_1\alpha_2$ を $\alpha_1 = [f_1]$, $\alpha_2 = [f_2]$ となる f_1, f_2 を使って、$\alpha_1\alpha_2 = [f_1 \natural f_2]$ で定義する。

(1) 上の演算が適切に定義されている (well defined) とはどういうことか？　また演算が定義できていることを確かめよ。

(2) この演算について、結合律が成り立つことを示せ（下の左図参照）。

(3) b_X への定値写像を c とする。c のホモトピー類 $[c]$ が上の演算の単位元であることを示せ。

(4) $f \in \mathrm{Map}((I^n, \partial I^n), (X, b_X))$ に対し、$\overline{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n)$ とおくと、上の演算について、ホモトピー類 $[f]$ の逆元がホモトピー類 $[\overline{f}]$ で与えられることを示せ（下の右図参照）。



問題１－２. $n \geqq 2$ のとき、$\pi_n(X, b_X)$ は可換群であることを示せ。

問題１－３. k を 2 以上の自然数とする。

$$S^{k-1} = \{x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| = 1\}, \quad D^k = \{x \in \mathbf{R}^k \mid \|x\| \leqq 1\}$$

とする。弧状連結な空間 X とその上の点 b_X を考える。「$\pi_{k-1}(X, b_X)$ が単位群であること」と「任意の写像 $f : S^{k-1} \longrightarrow X$ に対し、$g : D^k \longrightarrow X$ で $g|\partial D^k = f$ を満たすものが存在すること」は同値であることを示せ。