キネットの公式・チェイン複体のホモロジー
普遍係数定理・コホモロジー群

キネットの公式の証明

キネットの公式は次のものである。C_*, C'_* を自由加群からなるチェイン複体とする。

$$H_n(C_* \otimes C'_*) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(C_*), H_q(C'_*))$$

証明は

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{I} H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(C_*), H_q(C'_*)) \longrightarrow 0$$

が分裂する完全系列であることを示す。

まず、$Z_p = \ker(\partial : C_p \longrightarrow C_{p-1})$ とし、$\overline{B}_p = \mathrm{im}(\partial : C_p \longrightarrow C_{p-1})$ とする（普通は $\overline{B}_p$ は B_{p-1} と書かれる）。このとき、

$$0 \longrightarrow Z_* \xrightarrow{i} C_* \xrightarrow{\partial} \overline{B}_* \longrightarrow 0$$

は自由加群からなるチェイン複体の短完全系列である。よって、$s_p : \overline{B}_p \longrightarrow C_p$ で $\partial \circ s_p = \mathrm{id}_{\overline{B}_p}$ となるもの、あるいは $r_p : C_p \longrightarrow Z_p$ で、$r_p \circ \partial = \mathrm{id}_{Z_p}$ となるものが存在する（このことを「分裂する」という）。とくに $C_p \cong Z_p \oplus \overline{B}_p$ である。

$\overline{B}_*$ は自由加群だから、完全系列

$$0 \longrightarrow Z_* \otimes C'_* \xrightarrow{i} C_* \otimes C'_* \xrightarrow{\partial} \overline{B}_* \otimes C'_* \longrightarrow 0$$

が得られる。（ここで $p : C_* \otimes C'_* \longrightarrow Z_* \otimes C'_*$ で $p \circ i = \mathrm{id}_{C_* \otimes C'_*}$ となるものがある。）
このチェイン複体の短完全系列から、ホモロジー群の長完全系列が得られる。

$$H_{n+1}(\overline{B}_* \otimes C'_*) \xrightarrow{\partial} H_n(Z_* \otimes C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow H_n(\overline{B}_* \otimes C'_*) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Z_* \otimes C'_*)$$

ここで、

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & & & {} \arrow[d] \\
Z_{p-1} \otimes C'_q & Z_p \otimes C'_q \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "(-1)^p \partial''"] & & \overline{B}_{p-1} \otimes C'_q & \overline{B}_p \otimes C'_q \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "(-1)^p \partial''"] \\
 & Z_p \otimes C'_{q-1} & & & B_p \otimes C'_{q-1}
\end{tikzcd}$$

であり F が自由加群のとき $H_*(F \otimes C'_*) \cong F \otimes H_*(C'_*)$ となるから、

$$\bigoplus_{p+q=n+1} \overline{B}_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes H_q(C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \overline{B}_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{p+q=n-1} Z_p \otimes H_q(C'_*)$$

∂ の定義をみると、$\partial = j \otimes \mathrm{id}$ $(j : \overline{B}_{p+1} = B_p \subset Z_p)$ であることがわかる。

$$\bigoplus_{p+q=n} B_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{j \otimes \mathrm{id}} \bigoplus_{p+q=n} Z_p \otimes H_q(C'_*) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} B_p \otimes H_q(C'_*) \xrightarrow{j \otimes \mathrm{id}} \bigoplus_{p+q=n-1} Z_p \otimes H_q(C'_*)$$

従って、完全系列 $0 \longrightarrow \mathrm{coker}(j \otimes \mathrm{id}) \longrightarrow H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \ker(j \otimes \mathrm{id}) \longrightarrow 0$ を得る。

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p(C_*) \longrightarrow 0$$

から、$H_q(C'_*) = H'_q$ と書いて $\mathrm{coker}(j \otimes \mathrm{id}) \cong H_p(C_*) \otimes H'_q$、また Tor の定義により、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_p, H'_q) \longrightarrow B_p \otimes H'_q \xrightarrow{j \otimes \mathrm{id}} Z_p \otimes H'_q \longrightarrow H_p(C_*) \otimes H'_q \longrightarrow 0$$

従って、$\ker(j \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{Tor}(H_p, H'_q)$ を得る。次元に注意してまとめて、キネットの公式のうちの完全系列を得る。

分裂することを示すために、$r_p : C_p \longrightarrow Z_p$ と同様に $r'_q : C'_q \longrightarrow Z'_q$ $(r'_q \circ i = \mathrm{id}_{Z'_q})$ をとる。$C_* \otimes C'_*$ の元 c で、$c = \partial c'$ と書かれるものをとると、

$$c' = \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} a_{p,q}^{i_{p,q}} c_p^{i_{p,q}} \otimes c_q^{i_{p,q}}$$

のように書かれ、

$$\begin{aligned}
&(r \otimes r')c = (r \otimes r')(\partial' c' \pm \partial'' c') \\
&= (r \otimes r')\left(\sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} a_{p,q}^{i_{p,q}} \partial c_p^{i_{p,q}} \otimes c_q^{i_{p,q}} + \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} (-1)^p a_{p,q}^{i_{p,q}} c_p^{i_{p,q}} \otimes \partial c_q^{i_{p,q}} \right) \\
&= \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} a_{p,q}^{i_{p,q}} \partial c_p^{i_{p,q}} \otimes r'(c_q^{i_{p,q}}) + \sum_{p+q=n+1} \sum_{i_{p,q}} (-1)^p a_{p,q}^{i_{p,q}} r(c_p^{i_{p,q}}) \otimes \partial c_q^{i_{p,q}} \\
&\in \bigoplus_{p+q=n} (B_p \otimes Z_q) \oplus \bigoplus_{p+q=n} (Z_p \otimes B_q)
\end{aligned}$$

従って、$[(r \otimes r')c] = 0 \in \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)$ となって、$R : H_n(C_* \otimes C'_*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)$ が定義されるが、$(r \otimes r') \circ (i \otimes i') = \mathrm{id}_{Z_* \otimes Z'_*}$ だから、$R \circ I = \mathrm{id}_{\bigoplus_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes H_q(C'_*)}$ となる。従って完全系列は分裂する。

チェイン複体のホモロジー

有限生成自由加群からなるチェイン複体 $C_* : 0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} 0$ に対して、$C_0, C_1, \ldots, C_n$ の基底を代数的に取り替えて ∂ の表示を簡単にすることができる。

すなわち、$\partial : C_\ell \longrightarrow C_{\ell-1}$ は $k_{\ell-1}$ 行 k_ℓ 列の整数係数の行列で表されているから、行列基本変形を行えば、次の形の行列で書かれる。

$$\begin{pmatrix}
e_1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\
0 & e_2 & \cdots & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & e_r & & & \\
 & & & & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

ここで $e_1, e_2, \ldots, e_r$ は $e_1|e_2|\cdots|e_{r-1}|e_r$ （e_1 は e_2 の約数, $\ldots$, e_{r-1} は e_r の約数）を満たす自然数であり、$\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}$ は $k_{\ell-1} - r$ 行 $k_\ell - r$ 列の零行列である。$e_1, e_2, \ldots, e_r$ のうちの最初の p_ℓ 個は 1, 残りの $q_\ell = r - p$ 個を $m_1^\ell, \ldots, m_{q_\ell}^\ell$ として、行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & & & & \\ & & & m_1^\ell & \cdots & 0 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 0 & \cdots & m_{q_\ell}^\ell & & & \\ & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$m_1^\ell|m_2^\ell|\cdots|m_{q_\ell}^\ell$ のように書かれる。このように行列を書く基底により、$C_\ell = \mathbf{Z}^{k(\ell)} = \mathbf{Z}^{p_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{q_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{k_\ell - (p_\ell + q_\ell)}$ と書き、$C_{\ell-1} = \mathbf{Z}^{k(\ell-1)} = \mathbf{Z}^{p_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{q_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{k_{\ell-1} - (p_\ell + q_\ell)}$ と書くと、

$$\begin{aligned} \ker\partial &= \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{Z}^{k_\ell - (p_\ell + q_\ell)} \subset \mathbf{Z}^{k_\ell}, \\ \mathrm{im}\partial &= \mathbf{Z}^{p_\ell} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q_\ell} m_i^\ell \mathbf{Z} \oplus \mathbf{0} \subset \mathbf{Z}^{p} \oplus \mathbf{Z}^{q_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{k_{\ell-1} - (p_\ell + q_\ell)} \subset \mathbf{Z}^{k_{\ell-1}} \end{aligned}$$

である。

チェイン複体 C_* においては、$\partial \circ \partial = 0$ すなわち $\mathrm{im}(\partial : C_{\ell+1} \longrightarrow C_\ell) \subset \ker(\partial : C_\ell \longrightarrow C_{\ell-1})$ であるから、$C_\ell = \mathbf{Z}^{k_\ell} = \mathbf{Z}^{p_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{q_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{k_\ell - (p_\ell + q_\ell)}$ においては、

$$\mathrm{im}(\partial : C_{\ell+1} \longrightarrow C_\ell) \subset \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{Z}^{k_\ell - (p_\ell + q_\ell)} = \ker(\partial : C_\ell \longrightarrow C_{\ell-1})$$

である。この $\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{Z}^{k_\ell - (p_\ell + q_\ell)} = \ker(\partial : C_\ell \longrightarrow C_{\ell-1})$ における基底を取り替えて、$\partial : C_{\ell+1} \longrightarrow \ker(\partial : C_\ell \longrightarrow C_{\ell-1}))$ を表す行列が上の形の $k_{\ell+1}$ 行 $k_\ell - (p_\ell + q_\ell)$ 列の行列に書かれる。

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & & & & & & \\ & & & m_1^{\ell+1} & \cdots & 0 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 0 & \cdots & m_{q_{\ell+1}}^{\ell+1} & & & \\ & & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

従って、ホモロジー群は

$$H_\ell(C_*) \cong \mathbf{Z}^{k_\ell-(p_\ell+q_\ell)-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q_{\ell+1}} \mathbf{Z}/m_i^{\ell+1}\mathbf{Z}$$

となる。

さて、チェイン複体のオイラー標数（オイラー・ポアンカレ標数）を $\chi(C_*) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell k_\ell$ で定義する。このとき、$\chi(C_*) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \mathrm{rank}(H_\ell(C_*))$ となることは、講義で述べように次のように示される。

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$$

に対して、$\mathrm{rank}(H_\ell(X)) = \mathrm{rank}(\mathrm{ker}\partial_\ell/\mathrm{im}\partial_{\ell+1}) = \mathrm{rank}(\mathrm{ker}\partial_\ell) - \mathrm{rank}(\mathrm{im}\partial_{\ell+1})$ だから、

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \mathrm{rank}(H_\ell(X)) &= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell(\mathrm{rank}(\mathrm{ker}\partial_\ell) - \mathrm{rank}(\mathrm{im}\partial_{\ell+1})) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell(\mathrm{rank}(\mathrm{ker}\partial_\ell) + \mathrm{rank}(\mathrm{im}\partial_\ell)) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \mathrm{rank}(C_k(X)) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell k(\ell) = \chi(X)
\end{aligned}$$

与えられているものがチェイン複体

$$C_* : 0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$$

で、ここの ∂_i は整数係数の行列で表されている。隣り合う行列の積が 0 行列であることがチェイン複体ということであるが、

$C_i \cong \mathbf{Z}^{k_i}$ の代わりに $\mathbf{R}^{k_i}$, ${\mathbf{F}_p}^{k_i}$ などに行列が作用すると考えてもチェイン複体となる。アーベル群 A に対し、$\mathbf{Z}^k \otimes A = A^k$ であるから、

$$C_* \otimes A : 0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \otimes A \xleftarrow{\partial_1} C_1 \otimes A \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n \otimes A \xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$$

が定義される。A が体 K（$\mathbf{R}$, $\mathbf{F}_p$ など）のとき $H_*(C_* \otimes K)$ について、$\chi(C_*) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^\ell \dim(H_\ell(C_* \otimes K))$ となることが、rank で書いたのと同じ計算によりわかる。$\mathrm{rank}(H_\ell(C_*)) = \dim(H_\ell(C_* \otimes \mathbf{R}))$ だが、$\dim(H_\ell(C_* \otimes \mathbf{F}_p))$ とは一般には異なる。体 K を使う計算は、$\mathbf{Z}$ 上の計算よりもわかりやすい。

普遍係数定理

キネットの公式を用いて $H_*(C_*)$ から $H_*(C_* \otimes A)$ を求めることができる。

すなわち、チェイン複体 $0 \longleftarrow G \longleftarrow 0$ と

$$C_* : 0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$$

のテンソル積のホモロジー群を考えればよい。

このときのキネットの公式により、

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) \otimes G \longrightarrow H_n(C_* \otimes G) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \longrightarrow 0$$

は分裂する完全系列である。

コホモロジー群

チェイン複体

$$C_* : 0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} 0$$

を行列の並んだものと考えると、∂_ℓ は C_ℓ の k_ℓ 次元の列ベクトルに作用し、$C_{\ell-1}$ の $k_{\ell-1}$ 次元の列ベクトルを与えている。この行列は、$k_{\ell-1}$ 次元の行ベクトルに作用し、k_ℓ 次元の行ベクトルを与えることもできる。k_ℓ 次元の整数行ベクトルの空間を C^k とすると、

$$C_* : 0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\delta_0} C^1 \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \longrightarrow 0$$

が得られる。$\delta_{\ell-1}$ は ∂_ℓ と同じ行列である。($\delta_{\ell-1}$ を列ベクトルに作用させようとすると ∂_ℓ の転置行列である。) 行ベクトルをみることは、C_ℓ 上の $\mathbf{Z}$ 値線形形式の全体をみるということであり、$C^\ell = \mathrm{Hom}(C_\ell, \mathbf{Z})$ を考えているということである。

上の系列について、$\delta \circ \delta = 0$ であり、コチェイン複体と呼ばれる。

コチェイン複体から $\mathrm{ker}\delta/\mathrm{im}\delta$ として得られる群をコホモロジー群と呼び、$H^*(C^*)$ と書く。

行列を標準形にしたものが、$\delta_\ell : C^\ell \longrightarrow C^{\ell+1}$ をあたえているが、δ_ℓ は $\partial_{\ell+1}$ を表す行列であった。$C^\ell = \mathbf{Z}^{p_{\ell+1}} \oplus \mathbf{Z}^{q_{\ell+1}} \oplus \mathbf{Z}^{k_\ell-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})}$, $C^{\ell-1} = \mathbf{Z}^{p_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{q_\ell} \oplus \mathbf{Z}^{k_{\ell-1}-(p_\ell+q_\ell)}$ において、$\mathrm{ker}\delta_\ell = \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{Z}^{k_\ell-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})}$ が $\mathrm{im}\delta_{\ell-1}$ を含み、

$$H^\ell(C^*) \cong \mathbf{Z}^{k_\ell-(p_{\ell+1}+q_{\ell+1})-(p_\ell+q_\ell)} \oplus \bigoplus_{i=1}^{q_\ell} \mathbf{Z}/m_i^\ell\mathbf{Z}$$

となる。すなわち、$\mathrm{rank}(H^\ell(C^*)) = \mathrm{rank}(H_\ell(C_*))$ であり、$H^\ell(C^*)$ の有限位数の元のなす部分群 $\mathrm{torsion}(H^\ell(C^*))$ は $H_{\ell-1}(C^*)$ の有限位数の元のなす部分群 $\mathrm{torsion}(H_{\ell-1}(C_*))$ に同型である:$\mathrm{torsion}(H^\ell(C^*)) \cong \mathrm{torsion}(H_{\ell-1}(C_*))$.

これは、普遍係数定理の一部分として次のように Ext を用いて定式化されている。

定義。A に対し、$0 \longrightarrow \mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全系列となるように $\mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}^n$ をとる。このとき、$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,B)$ は完全系列である。$\mathrm{Ext}(A,B)$ を

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}^n,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}(A,B) \longrightarrow 0$$

が完全となることで定義する。

このとき、$\mathrm{Ext}(A,\mathbf{Z}) \cong \mathrm{torsion}(A)$ である。

アーベル群 G に対し、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_*),G) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(C_*,G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(C_*),G) \longrightarrow 0$$

は分裂する完全系列である。

これはコチェイン複体 $0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$ への線形写像全体をとったと考えることができて、次の一般化が得られる。

C_* をチェイン複体、C'^* をコチェイン複体として、$\mathrm{Hom}(C_p,C'^q)$ を考えると、$\mathrm{Hom}(C_p,C'^q) \ni c : C_p \longrightarrow C^q$ に対し、$(\delta' c)(a) = c(\partial a)$, $(\delta'' c)(a) = \delta''(c(a))$ により、２重複体の構造が得られる。$\delta = \delta' + (-1)^p\delta''$ として、

$$\delta : \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(C_p,C'^q) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Hom}(C_p,C'^q)$$

が定まり、$\delta\circ\delta = 0$ である。キネットの公式の証明と同様にして、

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}(H_p(C_*),H^q(C'^*)) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}(C_*,C'^*)) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_p(C_*),H^q(C'^*)) \longrightarrow 0$$

が分裂する完全系列であることが示される。ここで、$C'^* = \mathrm{Hom}(C_*,\mathbf{Z})$ であるときは、$\mathrm{Hom}(C_*,C'^*) = \mathrm{Hom}(C_*,\mathrm{Hom}(C'_*,\mathbf{Z})) \cong \mathrm{Hom}(C_*\otimes C'_*,\mathbf{Z})$ である。従って、$H^n(\mathrm{Hom}(C_*,C'^*)) \cong H^n((C_*\otimes C'_*)^*)$ である。

これは、ホモロジーは Tor, コホモロジーは Ext という標語にあっているものである。

実際には、C_*, C'_* を有限生成自由アーベル群とすると、次の同型も存在する。

$$\mathrm{Hom}(C_*\otimes C'_*,\mathbf{Z}) \cong \mathrm{Hom}(C_*,\mathbf{Z})\otimes\mathrm{Hom}(C'_*,\mathbf{Z})$$

すなわち、$(C_*\otimes C'_*)^* \cong C^*\otimes C'^*$ である。ホモロジー群のキネットの公式の証明とバウンダリー準同型がコバウンダリー準同型になることを除き全く同様にして次の分裂する完全系列が得られる。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(C^*)\otimes H^q(C'^*) \xrightarrow{I} H^n(C^*\otimes C'^*) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}(H^p(C^*),H^q(C'^*)) \longrightarrow 0$$

カップ積の定義にはこちらを用いる。

コホモロジー群の最大の特徴は、２つのチェイン複体 C_*, C'_* の間のチェイン写像 $F : C_* \longrightarrow C'_*$ に対し、$F^* : \mathrm{Hom}(C'_*,\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_*,\mathbf{Z})$, すなわち $F^* : C'^* \longrightarrow C^*$

の方向にコチェイン写像（すなわち，$F^* \circ \delta = \delta \circ F^*$ となる準同型写像）が定義されることである。従って、準同型写像 $F^* : H^*(C'^*) \longrightarrow H^*(C^*)$ が定義される。

胞体複体 X に付随するチェイン複体 $C_*(X)$ に対して、$\mathrm{Hom}(C_*(X), \mathbf{Z}) = C^*(X)$ が胞体複体 X に付随するコチェイン複体として定義される。コチェイン複体 $C^*(X)$ のコホモロジー群を $H^*(X)$ と書く。

胞体複体 X, Y と胞体写像 $F : X \longrightarrow Y$ に対して、チェイン写像 $F_* : C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$ が定義されるとともに、コチェイン写像 $F^* : C^*(Y) \longrightarrow C^*(X)$ が定義される。

ここで、胞体写像 $F : X \longrightarrow Y, G : Y \longrightarrow Z$ に対して、胞体写像 $G \circ F : X \longrightarrow Z$ がえられるが、ホモロジー群については $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Z)$ を満たす（共変関手）のに対しこホモロジー群については $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : H^*(Z) \longrightarrow H^*(X)$ を満たす（反変関手)。

コホモロジー理論の公理

コホモロジー理論を公理的に展開することもできる。そのときの公理は、

- （位相空間対，連続写像）から（次数つき $\mathbf{Z}$ 加群，準同型写像）への反変関手である。
- 連続写像がホモトピックなら誘導される準同型は一致する。（ホモトピー公理）
- 対のコホモロジー完全系列があり、連結準同型は自然性を持つ。

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\delta^*} H^\ell(X,Y) \xrightarrow{j^*} H^\ell(X) \xrightarrow{i^*} H^\ell(Y) \\ \xrightarrow{\delta^*} H^{\ell+1}(X,Y) \xrightarrow{j^*} H^{\ell+1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{\ell+1}(Y) \end{array}$$

- $X \supset A \supset B$, A 開集合、B 閉集合のとき、$H^*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H^*(X, A)$ （切除公理）
- $H^*(1\,点) \cong \mathbf{Z}\ (* = 0), \cong 0\ (* \neq 0)$. （次元公理）

カップ積

準同型の向きが変わったことにより、コホモロジー群の上には積構造が定義され、コホモロジー環、あるいはコホモロジー代数と呼ばれる。積はカップ積と呼ばれる。定義は簡単である。

$D : X \longrightarrow X \times X$ を対角写像とする。$D(x) = (x, x)$ である。$D^* : H^*(X \times X) \longrightarrow H^*(X)$ が得られるが、キネットの公式によれば、$H^*(X) \otimes H^*(X) \longrightarrow H^*(X \times X)$ が存在する。これらの準同型の結合として得られる準同型写像をカップ積と呼ぶ。

$$\cup : \bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X)$$