ここでは、まずホモロジー理論の公理を述べる。すべての位相空間、空間対に対して、この公理を満たすホモロジー理論が存在することは、特異ホモロジー理論を定義して、この公理を満たすことを示すことにより示される。しかし、ホモロジー群の多くの計算は公理を知ればすぐにできることが多い。そこで、ホモロジー理論の公理を説明して、容易に導かれる計算をおこなうことをこの章の目的とする。

# 6 ホモロジー理論の公理

## 6.1 完全系列

群の完全系列については、説明しているが、今後、ホモロジー群の計算のために特に必要なので、アーベル群の完全系列について説明する。

**定義 6.1 (完全系列)** アーベル群 $A_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ からなる系列 $A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_n$ が完全系列であるとは $\ker(h_j) = \mathrm{im}(h_{j-1})$ が任意の整数 $j = 1, \ldots n-1$ に対して成立することである。アーベル群 $A_k$ と準同型 $h_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ の無限列に対しても、完全系列であることは、$\ker(h_j) = \mathrm{im}(h_{j-1})$ が定義されているところで成立することとする。

場合によって、準同型は $h_k : A_k \longrightarrow A_{k-1}$ の方向のこともある。

**【例 6.2】** 次のことは ker, im の定義、商の群の定義からわかる。

(0) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} B$ が完全系列であることと、$h$ が単射準同型であることは同値である。$A \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ が完全系列であることと、$h$ が全射準同型であることは同値である。

(1) $0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A \cong 0$ である。

(2) $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば、$h_0$ は同型写像 $A_0 \cong A_1$ である。

(3) $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_2 \cong A_1/h_0(A_0)$ である。

**【問題 6.3】** $0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} \boldsymbol{Z}^k \longrightarrow 0$ が完全系列ならば $A_1 \cong A_0 \oplus \boldsymbol{Z}^k$ を示せ。

**定義 6.4** 2つの完全系列 $A_k \xrightarrow{h_k} A_{k+1}$, $A'_k \xrightarrow{h'_k} A'_{k+1}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ の間の準同型とは、準同型 $f_k : A_k \longrightarrow A'_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ で、$h'_k \circ f_k = f_{k+1} \circ h_k$ を満たすもののことである。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A_0 & \xrightarrow{h_0} & A_1 & \xrightarrow{h_1} & \cdots & \xrightarrow{h_{n-2}} & A_{n-1} & \xrightarrow{h_{n-1}} & A_n \\
\downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\
A'_0 & \xrightarrow{h'_0} & A'_1 & \xrightarrow{h'_1} & \cdots & \xrightarrow{h'_{n-2}} & A'_{n-1} & \xrightarrow{h'_{n-1}} & A'_n
\end{array}
$$

**【問題 6.5】** [ファイブ・レンマ] 2つの完全系列 $A_k \xrightarrow{h_k} A_{k+1}$, $A'_k \xrightarrow{h'_k} A'_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, 4)$ の間の準同型 $f_k : A_k \longrightarrow A'_k$ $(k = 1, \ldots, 5)$ について

$f_1$, $f_2$, $f_4$, $f_5$ が同型写像ならば $f_3$ も同型写像であることを示せ。

**【解】**

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{h_1} & A_2 & \xrightarrow{h_2} & A_3 & \xrightarrow{h_3} & A_4 & \xrightarrow{h_4} & A_5 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\
A'_1 & \xrightarrow{h'_1} & A'_2 & \xrightarrow{h'_2} & A'_3 & \xrightarrow{h'_3} & A'_4 & \xrightarrow{h'_4} & A'_5
\end{array}$$

について、まず $f_3$ が単射であること。$f_3(x_3) = 0$ とすると、$0 = h'_3(f_3(x_3)) = f_4(h_3(x_3))$ で、$f_4$ は同型だから、$h_3(x_3) = 0$ を得る（　）。完全性から $x_2 \in A_2$ で $x_3 = h_2(x_2)$ となるものがある（　）が、$h'_2(f_2(x_2)) = f_3(h_2(x_2)) = 0$ だから、$y_1 \in A'_1$ で、$h'(y_1) = f_2(x_2)$ となるものがある（　）。$f_1$ は同型だから $x_1 \in A_1$ で $f_1(x_1) = y_1$ となるものがあり（　）、$f_2(x_2) = h'_1(f_1(x_1)) = f_2(h_1(x_1))$ だから、$h_1(x_1) = x_2$ である。従って、$x_3 = h_2(h_1(x_1)) = 0$ となる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & \longmapsto & x_2 & \longmapsto & x_3 & \longmapsto & 0 & \longmapsto & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
y_1 & \longmapsto & f_2(x_2) & \longmapsto & \underset{\text{仮定}}{0} & \longmapsto & 0 & \longmapsto &
\end{array}$$

全射であることは次のように示される。$y_3 \in A'_3$ について、$x_4 = f_4{}^{-1}h'_3(y_3) \in A_4$ をとる（　）。$h_4(x_4) = f_5{}^{-1}h'_4f_4(x_4) = f_5{}^{-1}h'_4h'_3(y_3) = 0$ だから、$x_3 \in A_3$ で $h_3(x_3) = x_4$ となるものがある（　）。$y_3 - f_3(x_3)$ について（　）、$h'_3(y_3 - f_3(x_3)) = h'_3(y_3) - h'_3(f_3(x_3)) = h'_3(y_3) - f_4(h_3(x_3)) = h'_3(y_3) - f_4(x_4) = 0$ だから、$y_2 \in A'_2$ で、$h'_2(y_2) = y_3 - f_3(x_3)$ となるものがある（　）が、$x_2 = f_2{}^{-1}(y_2)$　（　）について、$x_3 + h_2(x_2)$ をとると、$f_3(x_3 + h_2(x_2)) = f_3(x_3) + f_3(h_2(x_2)) = f_3(x_3) + h'_2(f_2(x_2)) = f_3(x_3) + y_3 - f_3(x_3) = y_3$ となる。

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & x_2 & \longmapsto & h_2(x_2) & & & \\
\longmapsto & & & & x_3 & \longmapsto & x_4 & \longmapsto 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow \\
\longmapsto & & & & y_3 & \longmapsto & h'_3(y_3) & \longmapsto 0 \\
 & & y_2 & \longmapsto & y_3 - f_3(x_3) & \longmapsto & 0 &
\end{array}$$

## 6.2　公理

まず、ホモロジー理論とは、空間対 $(X, A)$, 非負整数 $n$ に対して、$H_n(X, A)$ というアーベル群がを対応させ、空間対の間の連続写像 $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ に対して、準同型写像 $f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ を対応させる対応であり、次の公理を満たす。$A = \emptyset$ の空間対 $(X, \emptyset)$ を空間 $X$ と考え、$H_n(X, \emptyset)$ を $H_n(X)$ と書く。まず、名前を並べておく。

- この対応は共変関手である。
- この対応はホモトピー公理を満たす。
- 対の完全系列が存在する。この対の完全系列への対応も共変関手となる。
- 切除公理を満たす。
- 次元公理を満たす。

これらを順に説明しよう。

- 共変関手。

  「この対応は共変関手である」とは次のことである。

  (1) 空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, $g:(Y,B)\longrightarrow(Z,C)$ に対し、その結合 $g\circ f:(X,A)\longrightarrow(Z,C)$ に対応する $(g\circ f)_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Z,C)$ について、$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ が成立する。ここで、$f_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$, $g_*:H_n(Y,B)\longrightarrow H_n(Z,C)$ である。

  (2) 空間対 $(X,A)$ の恒等写像 $\mathrm{id}_X:(X,A)\longrightarrow(X,A)$ に対して、$(\mathrm{id}_X)_*=\mathrm{id}_{H_n(X,A)}:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(X,A)$ である。

  関手性により、$(X,A)$, $(Y,B)$ が同相ならば、各 $n$ についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- ホモトピー公理.

  「この対応はホモトピー公理を満たす」とは、$f_0,f_1:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ がホモトピックであるとき、$(f_0)_*=(f_1)_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_n(Y,B)$ となることである。

  この結果、$(X,A)$ と $(Y,B)$ がホモトピー同値ならば、各 $n$ についてホモロジー群 $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ は同型である。

- 対の完全系列

  対の完全系列は以下のものである。

  空間対 $(X,A)$ に対して連結準同型と呼ばれる準同型 $\partial_*:H_n(X,A)\longrightarrow H_{n-1}(A)$ が定まり、次の列が完全系列となる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(X,A)\\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-1}(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(A) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_2(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(A) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X) & \xrightarrow{j_*} & H_1(X,A) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(A) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X,A) & \longrightarrow 0
\end{array}$$

  ここで、$i:A\longrightarrow X$ は包含写像、$j:X=(X,\emptyset)\longrightarrow(X,A)$ である。連結準同型は、空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ に対して、$\partial_*\circ f_*=\partial_*\circ(f|A)_*$ を満たし、空間対の間の連続写像に、完全系列の間の準同型が対応する。

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "i_*"] & {}
\end{tikzcd}$$

- 切除公理

切除公理は次のものである（$A, B$ の条件については、特異ホモロジー理論で満たされるもっと緩やかなものを採用することも多い）。

$X \supset A \supset B$, $A$ は開集合、$B$ は閉集合とする。このとき、包含写像 $\iota : (X\backslash B, A\backslash B) \longrightarrow (X, A)$ に同型 $\iota_* : H_n(X\backslash B, A\backslash B) \longrightarrow H_n(X, A)$ が対応する。

この形では使いよいとは限らないので問題を参照。

**【問題 6.6】** $X \supset A \supset B$, $A$ 閉集合、$B$ 開集合のとき、$A \setminus B$ を含む開集合 $U$ で、包含写像 $(X, A) \longrightarrow (X, A \cup U)$, $(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow ((X \setminus B) \cup U, U)$ がホモトピー同値となるものがあれば、$H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*(X, A)$ となることを示せ。

**【問題 6.6 の解答】** $H_*(X \setminus B, A \setminus B) \cong H_*((X \setminus B) \cup U, U) \cong H_*(X, A \cup U) \cong H_*(X, A)$

- 次元公理

  次元公理とは次のものである。

  １点 $p$ からなる位相空間 $\{p\}$ に対して、$H_n(\{p\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n = 0) \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$

## 6.3 公理の帰結

多くの空間 $(X, A)$ に対して，計算は上の性質だけからでもできる。

**【例 6.7】** $H_n(X, X) \cong H_n(\emptyset, \emptyset) = H_n(\emptyset) \cong 0$ $(n \geqq 0)$.

空間対 $(X, X)$ に対して、切除公理を用いれば、$H_n(X, X) \cong H_n(\emptyset, \emptyset) = H_n(\emptyset)$ である。対の完全系列、

$$\begin{array}{llll} & & \cdots & \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, X) \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X) & \xrightarrow{i_*} H_n(X) & \xrightarrow{j_*} H_n(X, X) \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X, X) \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-2}(X) & \xrightarrow{i_*} \cdots & \end{array}$$

であるが、$i_* = (\mathrm{id}_X)_*$ で、関手性から、$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X)}$ であるから、$\partial_*$, $j_*$ はともに零準同型であり、$X_n(X, X) \cong 0$ となる。従って、$H_n(\emptyset) \cong 0$ である。

**【例 6.8】** $X$ が１点 $\{p\}$ とホモトピー同値ならば、ホモトピー公理と次元公理から、$H_n(\{p\}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n = 0) \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$ このとき、任意の写像 $c : \{p\} \longrightarrow X$ は、同型写像 $\boldsymbol{Z} \cong H_0(\{p\}) \longrightarrow H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ を導く。$x \in X$ に対して $c_x : \{p\} \longrightarrow X$ を $x$ を値とする定値写像とすると、$c_x$ は互いにホモトピックであるから、$(c_x)_*(1)$ は $H_0(X)$ の同じ元である。この元を $H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ の $1$ に対応する生成元とすることにする。こうして、１点からの写像による上の同型は $\boldsymbol{Z}$ の恒等写像と考える。

**【問題 6.9】** $X = X_1 \cup X_2$, $X_1$, $X_2$ は開集合とすると、各 $n$ に対して $H_n(X) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ を示せ。

**【問題 6.9 の解答】** 空間対の間の写像、$(X_1, \emptyset) \longrightarrow (X, X_2)$, $(X_2, X_2) \longrightarrow (X, X_2)$ がそれぞれの完全系列に誘導する準同型写像から、空間対 $(X_1, \emptyset)$ のホモロジー完全系

列と空間対 $(X_2, X_2)$ のホモロジー完全系列の直和から空間対 $(X, X_2)$ のホモロジー完全系列への準同型写像が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(X,X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X,X_2) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(X_2) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\begin{matrix} H_{n+1}(X_1) \\ \oplus \\ H_{n+1}(\emptyset) \end{matrix} & \xrightarrow{\partial_*} & \begin{matrix} H_n(\emptyset) \\ \oplus \\ H_n(X_2) \end{matrix} & \xrightarrow{i_*} & \begin{matrix} H_n(X_1) \\ \oplus \\ H_n(X_2) \end{matrix} & \xrightarrow{j_*} & \begin{matrix} H_n(X_1) \\ \oplus \\ H_n(\emptyset) \end{matrix} & \xrightarrow{\partial_*} & \begin{matrix} H_{n-1}(\emptyset) \\ \oplus \\ H_{n+1}(X_2) \end{matrix}
\end{array}$$

ここで、$H_n(X_1) \longrightarrow H_n(X, X_2)$ は切除公理により同型である。ファイブ・レンマから $H_n(X) \cong H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ が得られる。

# 7 球面のホモロジー群

この小節では、次を示す。

**命題 7.1** $n \geqq 1$ に対して、$D^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$, $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とする。このとき、

$$H_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}, \qquad H_k(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0,\ n) \\ 0 & (k \neq 0,\ n) \end{cases}$$

2 点 $S^0$ のホモロジー群については、問題 6.9 により、$H_*(S^0) \cong H_*(\{p\}) \oplus H_*(\{p\})$ すなわち、$H_n(S^0) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & (n = 0) \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$ がわかっている。

命題 7.1 の証明は次元の低いものから順に決めることで行われる。

最初に $(D^1, S^0) = ([-1, 1], \{-1, 1\})$ を考える。

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\partial_*} H_2(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_2([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_2([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_1(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_1([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_1([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} H_0(\{-1,1\}) \xrightarrow{i_*} H_0([-1,1]) \xrightarrow{j_*} H_0([-1,1],\{-1,1\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_2([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1([-1,1],\{-1,1\}) \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0([-1,1],\{-1,1\}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

この完全系列から $H_k([-1, 1], \{-1, 1\}) \cong 0$ $(k \geqq 2)$ がわかる。

例 6.8 の可縮な空間の $H_0$ の生成元の決め方により、$i_*(n_1, n_2) = n_1 + n_2$ がわかる。従って

$$H_0([-1,1],\{-1,1\}) \cong 0, \quad H_1([-1,1],\{-1,1\}) \cong \boldsymbol{Z}.$$

これが、命題 7.1 の $(D^1, S^0)$ の場合である。

$m \in \boldsymbol{Z} \cong H_1([-1, 1], \{-1, 1\})$ に対し、$\partial_* m = (m, -m)$ または $\partial_* m = (-m, m)$ ととれる。この一方を定めることは $[-1, 1]$ に向きを定めることと一致する。通常 $\overrightarrow{[-1, 1]}$ という向きで, $H_1([-1, 1], \{-1, 1\}) = H_1(D^1, S^0)$ の生成元を $[D^1, \partial S^0]$ とするとき、

$$\partial_*[D^1, \partial S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle = (-1, 1) \in \boldsymbol{Z}\langle -1 \rangle \oplus \boldsymbol{Z}\langle 1 \rangle = H_0(\{-1, 1\})$$

と向きをつける。

さて、$S^1=\{(x_1,x_2)\in \boldsymbol{R}^2 \mid {x_1}^2+{x_2}^2=1\}$ のホモロジー群を計算しよう。（講義と定義が異なるので注意 !!　こちらの定義が普通の向き付け（生成元のチョイス）と整合する。）

$S^1_+=\{x=(x_1,x_2)\in S^1 \mid x_1\geqq 0\}$, $S^1_-=\{x=(x_1,x_2)\in S^1 \mid x_1\leqq 0\}$ とする。

空間対 $(S^1,S^1_-)$ のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$
\begin{array}{rccccc}
 & H_2(S^1_-) & \xrightarrow{i_*} H_2(S^1) & \xrightarrow{j_*} & H_2(S^1,S^1_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(S^1_-) & \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^1,S^1_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1_-) & \xrightarrow{i_*} H_0(S^1) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^1,S^1_-) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} H_2(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} H_1(S^1) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} H_0(S^1) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理から $H_1(S^1,S^1_-)\cong H_1(S^1_+,\partial S^1_+)$, また、写像 $(S^1_+,\partial S^1_+)\longrightarrow (D^1,S^0)$ を $(x_1,x_2)\longmapsto x_2$ により定めると、これは同相であるから、$H_1(S^1_+,\partial S^1_+)\cong H_1(D^1,S^0)$ となることを使っている。この完全系列から $H_k(S^1)\cong 0$ $(k\geqq 2)$ がわかる。

$\partial_*: H_1(S^1,S^1_-)\longrightarrow H_0(S^1_-)$ を調べるために包含写像 $(S^1_+,\partial S^1_+)\longrightarrow (S^1,S^1_-)$ が誘導する $(S^1_+,\partial S^1_+)$ の完全系列と $(S^1,S^1_-)$ の完全系列の間の写像を見ると $\partial S^1_+=\{b_-,b_+\}$ $(b_\pm=(0,\pm 1))$ として、$\partial_*[S^1_+,\partial S^1_+]=\langle b_+\rangle-\langle b_-\rangle$ となっている。例 6.8 により、$\langle b_+\rangle$, $\langle b_-\rangle$ は包含写像 $(S^1_+,\partial S^1_+)\longrightarrow (S^1,S^1_-)$ によって $H_0(S^1_-)$ の同じ生成元に写る。従って、$\partial_*[S^1_+,\partial S^1_+]$ は 0 に写るから、$\partial_*$ は零写像となる。

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{(1,-1)} & \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} \\
H_1(S^1_+,\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(\{b_-,b_+\}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^1_+) \\
\downarrow\cong & & \downarrow & & \\
H_1(S^1,S^1_-) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1_-) & & \\
\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & &
\end{array}
$$

従って、$H_1(S^1)\cong \boldsymbol{Z}$, $H_0(S^1)\cong \boldsymbol{Z}$ が得られる。これが命題 7.1 の $S^1$ の場合である。$H_0(S^1)$ の生成元は、可縮な $H_0(S^1_-)$ の生成元の像であるから $x\in S^1$ について $H_0(\{x\})$ の生成元 $\langle x\rangle$ の像である。あるいは、定値写像 $c_x:\{p\}\longrightarrow S^1$ について $(c_x)_*1$ である。$H_1(S^1)$ の生成元 $[S^1]$ は $j_*[S^1]=[S^1,S^1_-]\longleftarrow[S^1_+,\partial S^1_+]$ により定まっている。

次は、$(D^2,S^1)$ である。ホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$
\begin{array}{rccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & H_2(S^1) & \xrightarrow{i_*} H_2(D^2) & \xrightarrow{j_*} & H_2(D^2,S^1) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(S^1) & \xrightarrow{i_*} H_1(D^2) & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^2,S^1) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^1) & \xrightarrow{i_*} H_0(D^2) & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^2,S^1) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccc}
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} H_2(D^2,S^1) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} H_1(D^2,S^1) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} H_0(D^2,S^1) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$H_0(S^1)$ と $H_0(D^2)$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^1) \xrightarrow{i_*} H_0(D^2)$ は同型であり、この完全系列から $H_k(D^2,S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k=2)$, $H_k(D^2,S^1) \cong 0$ $(k \neq 2)$ がわかる。このとき、$H_2(D^2,S^1)$ の生成元 $[D^2,S^1]$ は、$\partial_*[D^2,S^1] = [S^1] \in H_1(S^1)$ と定める。

次に $S^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ のホモロジー群を計算する。（ここでも講義と記号の定義が異なることに注意 !! ）

$S^2_+ = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in S^2 \mid x_1 \geqq 0\}$, $S^2_- = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in S^2 \mid x_1 \leqq 0\}$ とする。

空間対 $(S^2, S^2_-)$ のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & H_2(S^2_-) & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2) & \xrightarrow{j_*} & H_2(S^2,S^2_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_1(S^2_-) & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^2) & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^2,S^2_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^2_-) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^2) & \xrightarrow{j_*} & H_0(S^2,S^2_-) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^2) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^2) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理から $H_k(S^2,S^2_-) \cong H_k(S^2_+, \partial S^2_+)$ $(k \geqq 0)$, また、写像 $(S^2_+, \partial S^2_+) \longrightarrow (D^2,S^1)$ を、$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_2,x_3)$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^2_+, \partial S^2_+) \cong H_k(D^2,S^1)$ となることを使っている。この完全系列から $H_k(S^2) \cong \boldsymbol{Z}$ $(k=0,\,2)$, $H_k(S^2) \cong 0$ $(k \neq 0,\,2)$ がわかる。$H_0(S^2)$ の生成元は任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_2(S^2)$ の生成元 $[S^2]$ は $j_*[S^2] = [S^2,S^2_-] \longleftarrow\!\shortmid [S^2_+, \partial S^2_+]$ により定まっている。

これより次元の高いものについての議論は、$(D^2,S^1)$, $S^2$ の議論と同じである。念のために、書いておくと以下の通りである。

命題 7.1 が $n$ に対して正しいとし、$H_0(S^n)$ の生成元は、任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるとする。

$(D^{n+1},S^n)$ のホモロジー群について、空間対 $(D^{n+1},S^n)$ のホモロジー完全系列を書き、わかっているところを書き換えると以下のようになる。

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_n(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(S^n) & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & H_1(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{i_*} & H_0(D^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1},S^n) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_n(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & \cdots & & & \\
 & \cdots & \xrightarrow{i_*} & 0 & \xrightarrow{j_*} & H_1(D^{n+1},S^n) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & H_0(D^{n+1},S^n) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$H_0(S^n)$ と $H_0(D^{n+1})$ の生成元は、ともに任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であるから、$H_0(S^n) \xrightarrow{i_*} H_0(D^{n+1})$ は同型であり、この完全系

列から $H_k(D^{n+1},S^n)\cong \boldsymbol{Z}$ $(k=n+1)$, $H_k(D^{n+1},S^n)\cong 0$ $(k\neq n+1)$ がわかる。このとき、$H_{n+1}(D^{n+1},S^n)$ の生成元 $[D^{n+1},S^n]$ は、$\partial_*[D^{n+1},S^n]=[S^n]\in H_n(S^n)$ と定める。

次に $S^{n+1}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_{n+2})\in \boldsymbol{R}^{n+2} \mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$ のホモロジー群を計算する。$S^{n+1}_+=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_{n+2})\in S^{n+1}\mid x_1\geqq 0\}$, $S^2_-=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_{n+2}\in S^{n+1}\mid x_1\leqq 0\}$ とする。

空間対 $(S^{n+1},S^{n+1}_-)$ のホモロジー完全系列は次のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & H_{n+2}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+2}(S^{n+1},S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n+1}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(S^{n+1},S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{n}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{n}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n}(S^{n+1},S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & & & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & H_{1}(S^{n+1},S^{n+1}_-) & \\
\xrightarrow{\partial_*} & H_{0}(S^{n+1}_-) & \xrightarrow{i_*} & H_{0}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{0}(S^{n+1},S^{n+1}_-) & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+2}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \\
\xrightarrow{\partial_*} & 0 & \xrightarrow{i_*} & H_{n}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \cdots & & & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{j_*} & 0 & \\
\xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & H_{0}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & 0 & \longrightarrow 0
\end{array}
$$

下の列は上の列のわかっているところを書いたものである。ここで、切除公理から $H_k(S^{n+1},S^{n+1}_-)\cong H_k(S^{n+1}_+,\partial S^{n+1}_+)$ $(k\geqq 0)$, また、写像 $(S^{n+1}_+,\partial S^{n+1}_+)\longrightarrow (D^{n+1},S^n)$ を、$(x_1,\dots,x_{n+1},x_{n+2})\longmapsto (x_2,\dots,x_{n+2})$ により定めると、これは同相であるから、$H_k(S^{n+1}_+,\partial S^{n+1}_+)\cong H_k(D^{n+1},S^n)$ であることを使っている。この完全系列から $H_k(S^{n+1})\cong \boldsymbol{Z}$ $(k=0,\ n+1)$, $H_k(S^{n+1})\cong 0$ $(k\neq 0,\ n+1)$ がわかる。$H_0(S^{n+1})$ の生成元は任意の定値写像による $H_0(\{p\})$ の生成元の像であり、$H_{n+1}(S^{n+q})$ の生成元 $[S^{n+1}]$ は $j_*[S^{n+1}]=[S^{n+1},S^{n+1}_-]\longleftrightarrow[S^{n+1}_+,\partial S^{n+1}_+]$ により定まっている。以上により命題 7.1 が証明された。

## 8 円周から円周への写像の写像度

$H_0(S^1)\cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(S^1)\cong \boldsymbol{Z}$ である。連続写像 $f:S^1\longrightarrow S^1$ は準同型 $f_*:H_0(S^1)\longrightarrow H_0(S^1)$, $f_*:H_1(S^1)\longrightarrow H_1(S^1)$ を誘導する。

$f_*:H_0(S^1)\longrightarrow H_0(S^1)$ は $\times 1:\boldsymbol{Z}\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。実際、$H_0(S^1)$ の生成元は任意の写像 $c_x:\{p\}\longrightarrow S^1$ $(x\in S^1)$ による $H_0(\{p\})$ の生成元の像 $(c_x)_*1$ である。$f\circ c_x=c_{f(x)}$ だから、$f_*:H_0(S^1)\longrightarrow H_0(S^1)$ は $\times 1:\boldsymbol{Z}\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。

$f_*:H_1(S^1)\longrightarrow H_1(S^1)$ に対しては、同型 $H_1(S^1)\longrightarrow H_1(S^1,S^1_-)$ について考える。特別な写像 $f_m(x)=mx \bmod 1$ に対して、$(f_m)_*=m\times:\boldsymbol{Z}\longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。また、任意の $g:S^1\longrightarrow S^1$ に対し、ある $m\in \boldsymbol{Z}$ について $g\simeq f_m$ となることを示す。

（1）$f:[-1,1]\longrightarrow[-1,1]$ を $f(x)=-x$ とするとき、$\deg(f:(D^1,S^0)\longrightarrow (D^1,S^0))=-1$ である。

実際、$[D^1,S^0]\in H^1(D^1,S^0)$ は、$\partial_*[D^1,S^0]=\langle 1\rangle-\langle -1\rangle\in H_0(\{-1,1\})$ で定まっている。$(f|S^0)_*(\langle 1\rangle-\langle -1\rangle)=\langle -1\rangle-\langle 1\rangle$ であるから、下の図式が可換になるので、$f_*[D^1,S^0]=-[D^1,S^0]$ となる。

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(D^1,S^0)\ni & [D^1,S^0] & \xmapsto{\partial_*} & \langle 1\rangle-\langle -1\rangle & \in & H_0(\{-1,1\}) \\
f_*\downarrow & \downarrow f_* & & (f|S^0)_*\downarrow & & \downarrow (f|S^0)_* \\
H^1(D^1,S^0)\ni & -[D^1,S^0] & \underset{\partial_*}{\longmapsto} & \langle -1\rangle-\langle 1\rangle & \in & H_0(\{-1,1\})
\end{array}$$

（２）$\iota:[-1,1]\longrightarrow D^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1([-1,1],\{-1,1\})\xrightarrow{\iota_*}H_1(D^1,D^1\setminus\mathrm{Int}(\iota([-1,1])))\xleftarrow{j_*}H_1(D^1,S^0)$$

について、$\iota_*[[-1,1],\{-1,1\}]=\pm j_*[D^1,S^0]$ で、$\pm$ は $\iota$ が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となる。$\iota$ が向きを保つとき、$\iota:([-1,1],-1,1)\longrightarrow(D^1,D^1\setminus\mathrm{Int}(\iota([-1,1]))$, $j=\mathrm{id}:([-1,1],-1,1)\longrightarrow(D^1,D^1\setminus\mathrm{Int}(\iota([-1,1]))$ はホモトピックである。実際 $F(s,t)=s\iota(t)+(1-s)i(t)$ がホモトピーを与える。従って、$\iota$ が向きを保つとき、$\iota_*[[-1,1],\{-1,1\}]=j_*[D^1,S^0]$ である。$\iota$ が向きを反対にするとき、（１）の $f$ を使って $\iota\circ f$ は向きを保つから、$\iota_*f_*[[-1,1],\{-1,1\}]=j_*[D^1,S^0]$ となる。従って $\iota_*[[-1,1],\{-1,1\}]=-j_*[D^1,S^0]$ となる。

（３）$\iota:D^1\longrightarrow S^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1(S^1)\xrightarrow{j_*}H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^1)))\xleftarrow{\iota_*}H_1(D^1,S^0)$$

について、$\iota_*[D^1,S^0]=\pm j_*[S^1]$ で、$\pm$ は $\iota$ が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となる。

$[S^1]\in H^1(S^1)$ は $(j_{S^1_-})_*[S^1]=[S^1,S^1_-]=(i_{S^1_+})_*[S^1_+,S^0]\in H^1(S^1,S^1_-)$ で定まっている。同相写像 $(S^1,S^1_-)\longrightarrow(S^1,S^1-\mathrm{Int}(\iota(D^1)))$ が存在するので、$j_*$ は同型である。向きと符号の関係については以下を用いて考える。$\iota_1(D^1)\subset\iota_2(D^1)$ となる２つの埋め込みについて、

$$\begin{array}{ccccc}
H_1(S^1) \longrightarrow & H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_2(D^1))) & \longrightarrow & H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1))) \\
& \uparrow & & \uparrow \\
& H_1(\iota_2(D^1),\partial\iota_2(D^1)) & \longrightarrow & H_1(\iota_2(D^1),\iota_2(D^1)\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1))) \\
& & & \uparrow \\
& & & H_1(\iota_1(D^1),\partial\iota_1(D^1))
\end{array}$$

において、$[S^1]$, $[\iota_1(D^1),\partial\iota_1(D^1)]$, $[\iota_1(D^1),\partial\iota_1(D^1)]$ は、$H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1)))$ の同じ生成元に写っている。

まず、任意の $\iota(D^1)\subset S^1_-$ について、$\iota$ が向きを保つならば、（２）から $\iota_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota(D^1)))$ となる。$\iota_2$ が向きを保ち、$\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap S^1_-)\neq\emptyset$ ならば、$\iota_1(D^1)\subset\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap S^1_-)$ となる向きを保つ $\iota_1$ をとると、$(\iota_2)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1)))$ から、$(\iota_2)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)))$ がわかる。$\iota_2$ が向きを保ち、$\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap S^1_-)=\emptyset$ ならば、向きを保つ $\iota_3$ で、$\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap\iota_3(D^1))\neq\emptyset$, $\mathrm{Int}(\iota_3(D^1)\cap S^1_-)\neq\emptyset$ となるものをとれば、向きを保つ $\iota_1(D^1)\subset\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)\cap\iota_3(D^1))$ に対して、$(\iota_3)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_3(D^1)))$, $(\iota_2)_*[D^1,S^0]=(\iota_3)_*[D^1,S^0]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_1(D^1)))$ となる。従って $(\iota_2)_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]\in H_1(S^1,S^1\setminus\mathrm{Int}(\iota_2(D^1)))$ がわかる。

$\iota$ が向きを反対にする場合は、（２）の $f$ を用いて $\iota\circ f$ を考えれば、向きを保ち、$\iota_*f_*[D^1,S^0]=j_*[S^1]$ となる。従って、$\iota_*[D^1,S^0]=-j_*[S^1]$ となる。従って、

（4）（$S^1_\pm$ の定義を変えたので講義のものとは異なります。）$f_k : S^1 \longrightarrow S^1$ を $f_k(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = e^{2k\pi\sqrt{-1}\theta}$ で定義する。$\deg(f_k) = k$ となる。

$f_k{}^{-1}(S^1_-) = J_k$ とおく。$S^1 \cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 上では $J_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} [\frac{4i+1}{4k}, \frac{4i+3}{4k}]$ $(k \neq 0)$, $J_0 = \emptyset$ のように表される。

$k \geqq 1$ とする。$f_k : (S^1, J_k) \longrightarrow (S^1, S^1_-)$ をみると、

$$H_1(S^1, J_k) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} H_1([\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}], \{\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}\}) \cong \boldsymbol{Z}^k$$

である。

$$f_k|([\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}], \{\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}\}) \longrightarrow (S^1_+, \partial S^1_+)$$

は向きを保つ同相写像であるから、$(f_k)_*[[\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}], \{\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}\}] = [S^1_+, \partial S^1_+]$ となる。$[[\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}], \{\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}\}] = j_*[S^1]$ であるから、

$$\begin{aligned} j_*(f_k)_*[S^1] &= (f_k)_*[S^1, J_k] \\ &= \sum_{i=1}^{k} (f_k)_*[[\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}], \{\frac{4i-1}{4k}, \frac{4i+1}{4k}\}] \\ &= k[S^1, S^1_+] = j_*(k[S^1]) \end{aligned}$$

である。従って、$\deg(f_k) = k$ である。

$k = 0$ のときは、$f_0 = c_b \circ c_p$ $c_p : S^1 \longrightarrow \{p\}$, $c_b : \{p\} \longrightarrow S^1$ となり、$f_* = (c_b)_*(c_p)_*$ であるが、$H_1(\{p\}) \cong 0$ だから、$(f_0)_* = 0$ である。

$k = -1$ のとき、$(f_{-1})_*[S^1] = -[S^1]$ となる。$f_{-1} : (S^1, S^1_-) \longrightarrow (S^1, S^1_-)$ であるが、$f_{-1} : (S^1_+, \partial S^1_+) \longrightarrow (S^1_+, \partial S^1_+)$ について、(1) から、$(f_{-1})_*[S^1_+, \partial S^1_+] = -[S^1_+, \partial S^1_+]$ であり、$f_*([S^1] = -[S^1]$ となる。

一方、円周から円周への写像 $g$ はある $f_m$ にホモトピックである。

実際、円周の基本群について議論したように、合成写像 $g \circ p : [0,1] \longrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$ に対し、$\widetilde{g \circ p} : [0,1] \longrightarrow \boldsymbol{R}$ で、$p \circ \widetilde{g \circ p} = g \circ p$ となるものがある。$m = \widetilde{g \circ p}(1) - \widetilde{g \circ p}(0)$ とするとき、$f_m \circ p$ は $\widetilde{f_m \circ p}(x) = mx$ ととることができる。$\widetilde{F}(t,x) = (1-t)\widetilde{g \circ p}(x) + t\widetilde{f_m \circ p}(x)$ とおくと、$\widetilde{F}(t,1) = (1-t)\widetilde{g \circ p}(1) + t\widetilde{f_m \circ p}(1) = (1-t)(\widetilde{g \circ p}(0) + m) + tm = (1-t)\widetilde{g \circ p}(0) + m = (1-t)\widetilde{g \circ p}(0) + t\widetilde{f_m \circ p}(0) + m$ であり、連続写像 $F : [0,1] \times S^1 \longrightarrow S^1$ を引き起こす。従って、$g$ は $f_m$ とホモトピックとなる。このとき、$g_* = m\times : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1)$ となる。

## 9　球面から球面への写像の写像度

$n$ を 2 以上の整数として、$H_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_0(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ である。連続写像 $g : S^n \longrightarrow S^n$ に対して、$g_* : H_0(S^n) \longrightarrow H_0(S^n)$ は, 円周の場合と同様に $1\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。$g_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ は、ある整数 $m$ に対して、$m\times : \boldsymbol{Z} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ である。この $m$ を $g$ の写像度と呼び、$\deg(g)$ と書く。

$g : S^k \longrightarrow S^k$ に対して $Sg : S^{k+1} \longrightarrow S^{k+1}$ を

$$Sg(x_1, x_2, \ldots, x_{k+2}) = (x_1, \sqrt{1-x_1{}^2}\, g(\frac{(x_2, \ldots, x_{k+2})}{\sqrt{1-x_1{}^2}}))$$

で定義する。このとき、$\deg(g) = \deg(Sg)$ である。

実際、空間対 $(S_+^{k+1}, S^k)$ のホモロジー完全系列 $H_{k+1}(S_+^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S_+^{k+1}, S^k) \longrightarrow H_k(S^k) \longrightarrow H_k(S_+^{k+1})$ への $Sg|S_+^{k+1}$ の作用は、

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (Sg|S_+^{k+1})_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle (Sg|S^k)_*} & & \big\downarrow \\
0 & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0
\end{array}$$

において、$(Sg|S^k)_*$ は $m\times$ であるから、$(Sg|S_+^{k+1})_*$ も $m\times$ である。

さらに、空間対 $(S^{k+1}, S_-^{k+1})$ ののホモロジー完全系列 $H_{k+1}(S_-^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}, S_-^{k+1}) \longrightarrow H_k(S_-^{k+1})$ への $Sg$ の作用は、

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0 \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (Sg)_*} & & \big\downarrow{\scriptstyle (Sg)_*} & & \big\downarrow \\
0 & \xrightarrow{i_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{j_*} & \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\partial_*} & 0
\end{array}$$

において、$(Sg)_* : H_{k+1}(S^{k+1}, S_-^{k+1}) \longrightarrow H_{k+1}(S^{k+1}, S_-^{k+1})$ は切除公理により、準同型 $(Sg|S_+^{k+1})_* : H_{k+1}(S_+^{k+1}, S^k) \longrightarrow H_{k+1}(S_+^{k+1}, S^k)$ と同一視され、これは $m\times$ であるから、$(Sg)_*$ も $m\times$ である。

**【問題 9.1】** $f : S^n \longrightarrow S^n$ に対し、点 $y \in S^n$ で次の性質を持つものがあるとする。$y$ の $D^n$ と同相な閉近傍 $U$ が存在し、$f^{-1}(U)$ が連結成分 $V_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ の和 $f^{-1}(U) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ であるとするとき、$f|V_i : V_i \longrightarrow U$ は同相写像である。$f|V_j$ が向きを保つ同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = +1$, $f|V_j$ が向きを裏返す同相写像のとき $\sigma(f|V_j) = -1$ と $\sigma$ を定義するとき、$\deg f = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sigma(f|V_j)$ を示せ。