２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１月１６日

演習問題１． X, Y, Z を次で与えられる位相空間とする。

$$\begin{aligned}
X = \ & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \left((x^2+y^2)^{1/2}-2\right)^2+z^2=1\} \\
& \cup\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y=0, (x-2)^2+z^2 \leqq 1\} \\
Y = \ & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \\
& \cup\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x=y=0, |z| \leqq 1\} \\
Z = \ & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x+1)^2+y^2+z^2=1\} \\
& \cup\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y=0, (x-1)^2+z^2=1\}
\end{aligned}$$

（１）X, Y, Z のの胞体分割、単体分割を与えよ。
（２）X, Y, Z の胞体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。
（３）Y, Z の単体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。

演習問題２． 位相空間 X, Y のジョイン (join)$X*Y$ を商空間 $X*Y = X\times[0,1]\times Y/\sim$ として定義する。但し、同値関係 $\sim$ は、

$$(x_1,t_1,y_1) \sim (x_2,t_2,y_2) \Longleftrightarrow \begin{array}{c} (t_1=t_2=0 \text{ かつ } x_1=x_2) \\ \text{または} \\ (t_1=t_2=1 \text{ かつ } y_1=y_2) \end{array}$$

で生成されるものとする。
（１）$S^k * S^\ell \approx S^{k+\ell+1}$ を示せ。
（２）$X=\{p\}$ （１点からなる空間）とするとき、$\{p\}*Y$ を Y 上の錘 (cone) と呼ぶ。$\{p\}*Y$ は可縮な（１点とホモトピー同値な）位相空間であることを示せ。
（３）$X=S^0=\{-1,1\}$ のとき、S^0*Y を Y の懸垂 (suspension) と呼ぶ。Y のホモロジー群により、S^0*Y のホモロジー群を表せ。

ユークリッド空間の２つの交わらないアフィン空間上の単体 $\sigma^k=\langle v_0\cdots v_k\rangle$, $\sigma^\ell=\langle w_0\cdots w_\ell\rangle$ に対して、それらのジョインを $\sigma^k*\sigma^\ell=\langle v_0\cdots v_k w_0\cdots w_\ell\rangle$ で定義する。２つの交わらないアフィン空間上の単体複体 K, L に対し、それらのジョイン $K*L$ を、K の単体、L の単体、K の単体と L の単体のジョインとして得られる単体からなる単体複体とする。

問題． (1) 単体複体 K, L のジョイン $K*L$ のチェイン複体の単体について以下が成立することを示せ。

$$\partial(\sigma_0^0*\sigma_1^0)=\sigma_1^0-\sigma_0^0,\ \ell \geqq 1 \text{ のとき、} \partial(\sigma^0*\sigma^\ell)=\sigma^\ell-\sigma_0*(\partial\sigma^\ell)$$

(2) $K=\langle b\rangle$ とするとき、$\langle b\rangle * L$ のチェイン複体のホモロジー群を求めよ。

問題. K を有限単体複体、K の頂点集合 V に線形順序が与えられているとするとき、$[0,1]\times|K|$ の単体複体の構造を定めることができる。すなわち、$v_i^0=(0,v_i)$, $v_i^1=(1,v_i)$ として、K の k 単体 $\langle v_0\cdots v_k\rangle$ に対して、$k+1$ 個の $k+1$ 単体 $\langle v_0^0\cdots v_i^0v_i^1\cdots v_k^1\rangle$ $(i=0,\ldots,k)$, $k+2$ 個の $k+2$ 単体 $\langle v_0^0\cdots v_i^0v_{i+1}^1\cdots v_k^1\rangle$ $(i=-1,\ldots,k)$ を考える。
(1) これらの全体

$$\begin{aligned}&\{\langle v_0^0\cdots v_i^0v_i^1\cdots v_k^1\rangle \bigm| (i=0,\ldots,k),\ \langle v_0\cdots v_k\rangle\in K\}\\ \cup&\{\langle v_0^0\cdots v_i^0v_{i+1}^1\cdots v_k^1\rangle \bigm| (i=-1,\ldots,k),\ \langle v_0\cdots v_k\rangle\in K\}\end{aligned}$$

は単体複体となることを示せ。
(2) $\sigma=\langle v_0\cdots v_k\rangle$ に対して

$$P\sigma=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\langle v_0^0\cdots v_i^0v_i^1\cdots v_k^1\rangle$$

と置くとき、

$$\partial P\sigma+P\partial\sigma=\langle v_0^1\cdots v_k^1\rangle-\langle v_0^0\cdots v_k^0\rangle$$

を示せ。

問題. k 次元単体 σ の重心を b_σ とする ($\sigma=\langle v_0\cdots v_k\rangle$ とするとき、$b_\sigma=\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}v_i$)。
σ をそのすべての面 τ とともに、単体複体 K_σ と見て、頂点の集合を $\{b_\tau \bigm| \tau\prec\sigma\}$, 面の集合を、$\{\sigma_{\tau_0\tau_1\ldots\tau_j}=\langle b_{\tau_0}b_{\tau_1}\ldots b_{\tau_j}\rangle\bigm| \tau_0\prec\tau_1\prec\cdots\prec\tau_j\}$ としたものを K_σ の重心細分と呼び、K'_σ と書く。単体複体 K に対し、K の重心細分 K' が各単体を重心細分したものの和集合として定義される。$|K'|=|K|$ である。
$[0,1]\times|K|$ の単体分割（単体複体の構造）として、$\{0\}\times K$, $\{1\}\times K'$ を部分複体とするもの L が存在する。
$v_i=(0,v_i)$, $b_\sigma=(1,b_\sigma)$ と略記する。$[0,1]\times\sigma$ の単体複体の構造 L_σ を、

$$L_\sigma=\langle b_\sigma\rangle*K_\sigma\cup\bigcup_{i=0}^{k}L_{\partial_i\sigma}$$

とおく。但し、$\partial_i\langle v_0\cdots v_k\rangle=\langle v_0\cdots v_{i-1}v_{i+1}\cdots v_k\rangle$ である。このとき、$\displaystyle\bigcup_{\sigma\in K}L_\sigma$ が求める $[0,1]\times|K|$ の単体分割である。
(1) $L(K_{\sigma^0})$, $L(K_{\sigma^1})$, $L(K_{\sigma^2})$ を図示せよ。
(2) $\mathrm{bsd}:C_*(K)\longrightarrow C_*(L)$ を $\mathrm{bsd}\langle v\rangle=\langle b_v\rangle$, $\dim\sigma\geqq 1$ に対し $\mathrm{bsd}(\sigma)=\langle b_\sigma\rangle*(\mathrm{bsd}(\partial\sigma))$ で定義する。$\mathrm{BSD}:C_*(K)\longrightarrow C_{*+1}(L)$ を $\mathrm{BSD}\langle v\rangle=-\langle b_v\rangle*\langle v\rangle$, $\dim\sigma\geqq 1$ に対し $\mathrm{BSD}(\sigma)=-\langle b_\sigma\rangle*(\mathrm{BSD}(\partial\sigma)+\sigma)$ で定義する。
このとき、$\partial\mathrm{BSD}\sigma+\mathrm{BSD}\partial\sigma=\mathrm{bsd}\sigma-\sigma$ を示せ。