２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１２月１９日

演習問題１. 有限胞体複体 X, Y の直積について、$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$ を示せ。

演習問題２. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ は $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ に作用する。A のホモロジー群 $H_0(T^2)$, $H_1(T^2)$, $H_2(T^2)$ への作用 A_* を求めよ。

演習問題３. X を $S^1 \times D^2$ と微分同相な S^3 の部分集合とする。$S^3 - \mathrm{Int}X$ のホモロジー群を求めよ。ここで、$\mathrm{Int}X = X - \partial X$ とする。

問題１. 2 つの n 次元多様体 M_1, M_2 に対しそれらの連結和を次のように定義する。M_1, M_2 に含まれる n 次元閉球体を D_1, D_2 とし

$$M_1 \# M_2 = (M_1 - \mathrm{Int}D_1) \sqcup (M_2 - \mathrm{Int}D_2)/\sim$$

但し、$x \in \partial(M_1 - \mathrm{Int}D_1) = \partial D_1 \cong S^{n-1}$, $y \in \partial(M_2 - \mathrm{Int}D_2) = \partial D_2 \cong S^{n-1}$ に対し、 $x \sim y \Longleftrightarrow x = \overline{y}$ ($\overline{(y_1, y_2, ..., y_n)} = (-y_1, y_2, ..., y_n)$) とする。$M_1 \# M_2$ の整数係数ホモロジー群を M_1, M_2 の整数係数ホモロジー群であらわせ。

問題２. $A : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ を $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z})$ の $\mathbf{R}^2$ への作用から引き起こされる同相写像とするとき、次の空間の整数係数ホモロジー群を計算せよ.

$$X = (D^2 \times S^1)_1 \sqcup (D^2 \times S^1)_2/\sim$$

但し, $x \in \partial(D^2 \times S^1)_1 \cong \partial D^2 \times S^1$, $y \in (\partial D^2 \times S^1)_2 \cong \partial D^2 \times S^1$ に対し, $x \sim y \Longleftrightarrow x = A(y)$ とする.

問題３. (1)　$g \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対し、２次元多様体でホモロジー群が $H_2 \cong \mathbf{Z}$, $H_1 \cong \mathbf{Z}^{2g}$, $H_0 \cong \mathbf{Z}$ となるものを構成せよ。
(2)　$g \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対し、２次元多様体でホモロジー群が $H_2 \cong 0$, $H_1 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^g$, $H_0 \cong \mathbf{Z}$ となるものを構成せよ。

問題４. G を有限生成有限アーベル群とする。$k \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ とする。３次元多様体 M で、$H_3(M) \cong \mathbf{Z}$, $H_2(M) \cong \mathbf{Z}^k$, $H_1(M) \cong \mathbf{Z}^k \oplus G$, $H_0(M) \cong \mathbf{Z}$ となるものを構成せよ。