２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１２月１２日

演習問題１．（１）$D^2 \times S^1$ の胞体分割を定めよ。
（２）円周を $S^1 = e^0 \cup e^1$ と胞体分割するとき、射影 $D^2 \times S^1 \longrightarrow S^1$ の胞体近似を記述せよ。

演習問題２．（１）境界の包含写像 $i : \partial D^2 \times S^1 \longrightarrow D^2 \times S^1$ について、$i_* : H_k(\partial D^2 \times S^1) \longrightarrow H_k(D^2 \times S^1)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ を記述せよ。
（２）$S^3 = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2$, $D^2 \times S^1 \cap S^1 \times D^2 \approx S^1 \times S^1$ についてマイヤー・ビエトリス完全系列を書き、そこに現れる準同型を記述せよ。
（３）空間対 $(D^2 \times S^1, \partial D^2 \times S^1)$ のホモロジー完全系列により、$H_k(D^2 \times S^1, \partial D^2 \times S^1)$ を求めよ。

演習問題３．（１）$S^2 \times S^2$ の胞体分割を定め、ホモロジー群を求めよ。
（２）$\mathbf{R}P^2 \times \mathbf{R}P^2$ の胞体分割を定め、ホモロジー群を求めよ。

演習問題４． 有限生成アーベル群 A に対し、$0 \longrightarrow \mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}^n \longrightarrow A \longrightarrow 0$ が完全系列となるように $\mathbf{Z}^m \longrightarrow \mathbf{Z}^n$ をとる。このとき、$B^m \longrightarrow B^n \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$ は完全系列である（問題参照)。
$\mathrm{Tor}(A, B)$ を $0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, B) \longrightarrow B^m \longrightarrow B^n \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$ が完全系列となることで定義する。
$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ を求めよ。

問題． $\mathbf{Z}$ 上のテンソル積 $\otimes$ を考える。加群（アーベル群）の完全系列
$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ に対し、$A \otimes B \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_B} A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0$ は完全であることを示せ。
ヒント：テンソル積は任意の双 $\mathbf{Z}$ 線形写像 $A \times B \longrightarrow C$ が $A \otimes B \longrightarrow C$ を一意にファクターすることで定義される。あるいは $A \otimes B = A \times B / \sim$ ($\sim$ は $n \in \mathbf{Z}$ に対し $(na, b) \sim (a, nb)$ から生成される同値関係) と定義される。(a, b) の同値類を $a \otimes b$ と書く。
(1) 準同型 $A \longrightarrow A'$ に対し、$a \longmapsto a'$ ならば $a \otimes b \longmapsto a' \otimes b$ だから $A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B$ が定義される。同様に、準同型 $A' \longrightarrow A''$ に対し、$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B$ が定義される。問題のうち、$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow 0$ は、この定義から従う。
(2) $K = \ker(A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B)$ とすると、$(i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B) \subset K$ である。
$a'' \longmapsto a' \bmod i(A)$ をとることができるが、$a'' \otimes b \longmapsto a' \otimes b \bmod (i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ により、$A'' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B / (i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ が定義される。$A' \otimes B \longrightarrow A'' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B / (i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ は射影 $A' \otimes B \longrightarrow A' \otimes B / (i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$ と一致するから、$K \subset (i \otimes \mathrm{id}_B)(A \otimes B)$.

問題．(1)　$1 \leqq m < n$ とする。
$S^{m+n+1} = D^{m+1} \times S^n \cup S^m \times D^{n+1}$, $D^{m+1} \times S^n \cap S^m \times D^{n+1} \approx S^m \times S^n$ についてマイヤー・ビエトリス完全系列を書き、そこに現れる準同型を記述せよ。
(2)　$m \geqq 1$ とする。
$S^{2m+1} = D^{m+1} \times S^m \cup S^m \times D^{m+1}$, $D^{m+1} \times S^m \cap S^m \times D^{m+1} \approx S^m \times S^m$ についてマイヤー・ビエトリス完全系列を書き、そこに現れる準同型を記述せよ。

n 次元立方体 I^m は、$\{e^0_0, e^0_1, e^1\}^n$ の元に対応する 3^n 個の胞体からなる胞体複体の構造をもつ。立方体の各面に対応するチェイン複体の生成元について、座標の順序により、∂ が定めれているとする。すなわち、
$\partial e^1 = e^0_1 - e^0_0$,　$\partial(e^1 \times e^1) = (e^0_1 - e^0_0) \times e^1 - e^1 \times (e^0_1 - e^0_0)$,　$\ldots.$
I^n に対しては、

$$\partial(e^1 \times \cdots \times e^1) = (\partial e^1) \times \cdots \times e^1 - e^1 \times (\partial e^1) \times \cdots \times e^1 + \cdots + (-1)^{n-1} e^1 \times \cdots \times e^1 \times (\partial e^1)$$

となる。
　$I^{m+n+2} = I^{m+1} \times I^{n+1}$ を考える。$e^{m+1} = \prod^{m+1} e^1$, $e^{n+1} = \prod^{n+1} e^1$ に対し、$\partial e^{m+1} = e^m$, $\partial e^{n+1} = e^n$ とする胞体分割をとる。

$$\begin{aligned}\partial(e^{m+1} \times e^{n+1}) &= (\partial e^{m+1}) \times e^{n+1} + (-1)^{m+1} e^{m+1} \times (\partial e^{n+1}) \\ &= e^m \times e^{n+1} + (-1)^{m+1} e^{m+1} \times e^n\end{aligned}$$

である。これによると

$$\partial(e^m \times e^{n+1} + (-1)^{m+1} e^{m+1} \times e^n) = (-1)^m e^m \times e^n + (-1)^{m+1} e^m \times e^n = 0$$

となる。