# ２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１１月２８日

**演習問題１．** (1) $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \bigm| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ について,

$$\begin{aligned} & e_1^0 = (1,0,0), \quad e_2^0 = (-1,0,0) \\ & (e_1^0 \cup e_2^0) \cup (e_1^1 \cup e_2^1) = S^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \bigm| x_3 = 0\} \\ & S^2 = (e_1^0 \cup e_2^0) \cup (e_1^1 \cup e_2^1) \cup (e_1^2 \cup e_2^2) \end{aligned}$$

であり、接着写像が $A(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ で定義される $A : S^2 \longrightarrow S^2$ で不変であるような胞体複体の構造（胞体分割）を定めよ。
(2) (1) でとった胞体複体のチェイン複体を記述し、ホモロジー群を求めよ。
(3) $\mathbf{R}P^2 = S^2/A$ の胞体分割を定めよ。
(4) (3) でとった胞体複体のチェイン複体を記述し、ホモロジー群を求めよ。

**演習問題２．** (1) ２次元トーラス $T^2$ の胞体分割を定めよ。$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ としても $T^2 = \{((2+\cos\varphi)\cos\theta, (2+\cos\varphi)\sin\theta, \sin\varphi) \bigm| \varphi, \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}\}$ としても良い。
(2) ２次元トーラス $T^2$ のホモロジー群を求めよ。
(3) クライン・ボトル $K$ の胞体分割を定めよ。
(4) クライン・ボトル $K$ のホモロジー群を求めよ。

**演習問題３．** $n$ 次元有限胞体複体

$$\begin{aligned} & X = X^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots \supset X^{(1)} \supset X^{(0)}, \\ & X^{(\ell)} = X^{(\ell-1)} \cup_{\varphi_X^\ell} (D_1^\ell \sqcup \cdots \sqcup D_{k(\ell)}^\ell), \ (\ell = 1, \ \ldots, n), \end{aligned}$$

について、$H_*(X)$ が、$C_\ell(X) = H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) \cong \mathbf{Z}^{k(\ell)}$, $\partial : H_\ell(X^{(\ell)}, X^{(\ell-1)}) \xrightarrow{\partial_*} H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}) \xrightarrow{j_*} H_{\ell-1}(X^{(\ell-1)}, X^{(\ell-2)})$ で定められるチェイン複体のホモロジー群 $H_*(C_*(X))$ に等しい。このことから、$\displaystyle\sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \mathrm{rank}(H_\ell(X)) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell k(\ell)$ を示せ。$X$ のオイラー・ポアンカレ標数と呼び、しばしば $\chi(X)$ と書く。

**問題．** 演習問題１と同様の $n$ 次元球面の胞体分割で、$0 \leqq k \leqq n$ に対して $k$ 次元の胞体を２個持つものを構成せよ。
これにより、$\mathbf{R}P^n$ の胞体分割を与え，$\mathbf{R}P^n$ のホモロジー群を計算せよ。

**問題．** $\mathbf{C}P^2 = (\mathbf{C}^3 - \{0\})/\mathbf{C}^\times$ の胞体分割 $e^0 \cup e^2 \cup e^4$ を定めよ。このときの接着写像 $\partial D^4 \longrightarrow S^2 = e^0 \cup e^2$ を表せ。$\mathbf{C}P^2$ のホモロジー群を求めよ。
ヒント：$e^4 = \{[z_1 : z_2 : 1] \in \mathbf{C}P^2\} \cong \dfrac{(z_1, z_2)}{\sqrt{1 + |z_1|^2 + |z_2|^2}} \subset D^4$. $(w_1, w_2) \in S^3 \subset \mathbf{C}^2$ に対し、$\mathrm{Int}(D^4)$ から近づく点を取り、$\mathbf{C}P^2$ での極限を計算する。