２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１１月１４日

n を１以上の整数として、$f:(D_1^n, S_1^{n-1}) \longrightarrow (D_2^n, S_2^{n-1})$ あるいは $f: S_1^n \longrightarrow S_2^n$ の写像度 $\deg(f)$ を $f_*: H_n(D_1^n, S_1^{n-1}) \longrightarrow H_n(D_2^n, S_2^{n-1})$ あるいは $f_*: H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ について、$f_*[D_1^n, S_1^{n-1}] = \deg(f)[D_2^n, S_2^{n-1}]$ あるいは $f_*[S_1^n] = \deg(f)[S_2^n]$ で定義する。ここで、[ ] は n 次元ホモロジー群 ($\cong \mathbf{Z}$) の指定された生成元である。

演習問題１．（１）$f:[-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ を $f(x) = -x$ とするとき、
$\deg(f:(D^1, S^0) \longrightarrow (D^1, S^0)) = -1$ を示せ。
ヒント：$[D^1, S^0] \in H^1(D^1, S^0)$ は、$\partial_*[D^1, S^0] = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle \in H_0(\{-1,1\})$ で定まっている。

（２）$\iota: [-1,1] \longrightarrow D^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1([-1,1],\{-1,1\}) \xrightarrow{\iota_*} H_1(D^1, D^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota([-1,1]))) \xleftarrow{j_*} H_1(D^1, S^0)$$

について、$\iota_*[[-1,1],\{-1,1\}] = \pm j_*[D^1, S^0]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となることを示せ。

（３）$\iota: D^1 \longrightarrow S^1$ を像への同相写像とする。

$$H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota(D^1))) \xleftarrow{\iota_*} H_1(D^1, S^0)$$

について、$\iota_*[D^1, S^0] = \pm j_*[S^1]$ で、$\pm$ は ι が向きを保つとき $+$, 向きを反対にするとき $-$ となることを示せ。
ヒント：$[S^1] \in H^1(S^1)$ は $(j_{S^1_+})_*[S^1] = [S^1, S^1_+] = (i_{S^1_-})_*[S^1_-, S^0] \in H_1(S^1, S^1_+)$ で定まっている。同相写像 $(S^1, S^1_+) \longrightarrow (S^1, S^1 - \mathrm{Int}(\iota(D^1)))$ が存在するので、j_* は同型である。向きと符号の関係については以下を用いて考える。$\iota_1(D^1) \subset \iota_2(D^1)$ となる２つの埋め込みについて、

$$\begin{array}{ccccc}
H_1(S^1) \longrightarrow & H_1(S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota_2(D^1))) & \longrightarrow & H_1(S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota_1(D^1))) \\
& \uparrow & & \uparrow \\
& H_1(\iota_2(D^1), \partial\iota_2(D^1)) & \longrightarrow & H_1(\iota_2(D^1), \iota_2(D^1) \setminus \mathrm{Int}(\iota_1(D^1))) \\
& & & \uparrow \\
& & & H_1(\iota_1(D^1), \partial\iota_1(D^1))
\end{array}$$

において、$[S^1]$, $[\iota_1(D^1), \partial\iota_1(D^1)]$, $[\iota_1(D^1), \partial\iota_1(D^1)]$ は、$H_1(S^1, S^1 \setminus \mathrm{Int}(\iota_1(D^1)))$ の同じ生成元に写っている。

（４）$f_k: S^1 \longrightarrow S^1$ を $f_k(e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}) = e^{2k\pi\sqrt{-1}\theta}$ で定義する。$\deg(f_k) = k$ を示せ。
ヒント：$f_k{}^{-1}(S^1_+) = J_k$ とおく。$S^1 \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上では $J_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} [\frac{2i}{2k}, \frac{2i+1}{2k}]$ $(k \geqq 1)$, $J_0 = S^1$, $J_{-k} = \bigcup_{i=1}^{k} [\frac{2i-1}{2k}, \frac{2i}{2k}]$ $(k \geqq 1)$ のように表される。$f:(S^1, J_k) \longrightarrow (S^1, S^1_+)$ をみる。

演習問題２． １次元胞複体 X は、頂点の有限集合 $X^{(0)}=\{v_1,\dots,v_{k(0)}\}$ および辺の集合 $\{e_1,\dots,e_{k(1)}\}$ $(e_i\approx[-1,1])$ について、各 e_i の境界 ∂e_i と $X^{(0)}=\{v_1,\dots,v_{k(0)}\}$ の点との同一視 $a_i^1:\partial e_i\longrightarrow X^{(0)}$ が与えられたものである。

$$X=X^{(0)}\cup e_1\cup\cdots\cup e_{k(1)}$$

１次元連結有限胞複体のホモロジー群を求めよ。
ヒント：$(X,X^{(0)})$ のホモロジー完全列において、$H_1(X,X^{(0)})\xrightarrow{\partial_*}H_0(X^{(0)})$ は、準同型 $\mathbf{Z}^{k(1)}\longrightarrow\mathbf{Z}^{k(0)}$ である。また、$H_0(\{v_i\})\longrightarrow H_0(X)$ の像と $H_0(\{v_j\})\longrightarrow H_0(X)$ の像は、$a_\ell^1(\partial e_\ell)=\{v_i,v_j\}$ となる e_ℓ があれば一致する。一方、連結を仮定している。

問題． １次元連結有限胞複体ののホモトピー同値類はオイラー数で分類されることを示せ。

空間対 (X,A), 連続写像 $\varphi:A\longrightarrow Y$ について、$Z=Y\cup_\varphi X$ を次のような位相空間として定義する。直和 $X\sqcup Y$ 上の同値関係 $\sim$ を $x\in A$ について、$x\sim\varphi(x)$ となるような最小のものとして定義し、$Z=(X\sqcup Y)/\sim$ とおき、商位相をいれる。$Y\longrightarrow Z$ は単射で像への同相写像であり、これにより、$Y\subset Z$ と考え、空間対 (Z,Y) が定義される。また、$X\setminus A\longrightarrow Z$ も単射で像への同相写像である。

問題． X,Y がハウスドルフ空間で、A がコンパクト集合、A を含む X の開集合 U で、A へのレトラクションを持つものがあるとする。すなわち連続写像 $r:U\longrightarrow A$ で $r|A=\mathrm{id}_A$ となるものがあるとする。$\varphi:A\longrightarrow Y$ を連続写像とするとき $Z=Y\cup_\varphi X$ は、ハウスドルフ空間となることを示せ。