２００７年度幾何学特別演習 II　問題　　１０月１７日

演習問題１. $D^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq 1\}$, $S^1=\partial D^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$, 基点を $b=(1,0)$ とし，包含写像を $i:(S^1,b)\longrightarrow(D^2,b)$ とする。
$i_*:\pi_1(S^1,b)\longrightarrow\pi_1(D^2,b)$ を考えて，連続写像 $r:D^2\longrightarrow S^1$ で、$r\circ i=\mathrm{id}_{S^1}$ となるものが存在しないことを示せ。

演習問題２. $D^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq 1\}$ とし、$f:D^2\longrightarrow D^2$ を連続写像とする。$f(x,y)=(x,y)$ となる点 (x,y) が存在すること（ブラウアーの固定点定理）を以下の手順で示せ。
すべての $(x,y)\in D^2$ に対し、$f(x,y)\neq(x,y)$ と仮定する。$(x',y')\in S^1=\partial D^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ を、(x',y'), (x,y), $f(x,y)$ が直線上にこの順序で並ぶようにとる。写像 $r(x,y)=(x',y')$ について演習問題１の結果をつかう。

演習問題３.

$$\begin{aligned} X= &\ \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid \left((x^2+y^2)^{1/2}-2\right)^2+z^2=1\} \\ &\cup\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid y=0,(x-2)^2+z^2\leqq 1\} \\ Y= &\ \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x+1)^2+y^2+z^2=1\} \\ &\cup\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid y=0,(x-1)^2+z^2=1\} \end{aligned}$$

とする。X, Y を図示せよ。X, Y はホモトピー同値であることを示せ。写像の構成が難しければ写像の構成の仕方を図によって説明せよ。

演習問題４.

(1) $\mathbf{R}^2-\{\text{two points}\}$ と $S^1\times S^1-\{\text{one point}\}$ は同じホモトピー型を持つことを示せ。

(ヒント：ともに $S^1\vee S^1$ と同じホモトピー型を持つことを示せ。$S^1\vee S^1$ は２つの基点をもつ円周の基点を同一視して得られる空間である。)

(2) ジョルダンの閉曲線定理を用いて $\mathbf{R}^2-\{\text{two points}\}$ と $S^1\times S^1-\{\text{one point}\}$ は同相でないことを示せ。

ジョルダンの閉曲線定理とは「平面上の単純閉曲線（円周の連続な単射による像）Γ の補集合は２つの弧状連結成分 U, V をもち、$\Gamma=\overline{U}\setminus U$, $\Gamma=\overline{V}\setminus V$」というものである。

問題． 写像 $f: S^1 \cong \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$f(\theta) = \big(\cos(2\theta)\{2+\cos(3\theta)\}, \sin(2\theta)\{2+\cos(3\theta)\}, \sin(3\theta)\big)$$

で定める。　像 $f(S^1)$ を図示せよ。$\mathbf{R}^3 - f(S^1)$ の基本群を求めよ。この群のアーベル化は何か。
(ヒント: $\{(x,y,z) \mid \big((x^2+y^2)^{1/2}-2\big)^2 + z^2 = 1\}$ という曲面に注目する。 ファン・カンペンの定理を使う。)
時間のある人は次の問題を考えてみて下さい。
上の問題の $\mathbf{R}^3 - f(S^1)$ の基本群が $\mathbf{Z}$ と異なること、つまり可換群でないことはどうすればわかるか。

問題． n 次元立方体 I^n から m 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ の開集合 U への連続写像 $f: I^n \longrightarrow U$ を考える。この f に対し、ある実数 ε が存在し、$g: I^n \longrightarrow U$ が $\sup_{t\in I^n} \|g(t) - f(t)\| < \varepsilon$ を満たす連続写像ならば、$(1-s)g(t) + sf(t) \in U$ となることを示せ。

問題． n 次元立方体 I^n について、その境界を ∂I^n とする。m 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ の開集合 U とその上の点 $b \in U$ について、写像 $f: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ を考える。$f: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな滑らかな写像 $g: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$, $f: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ とホモトピックな区分線形な写像 $\overline{f}: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (U, b)$ が存在することを示せ。ただし、区分線形な写像とは、I^n を n 単体に分割できて、各単体の上では１次写像（アフィン写像）であるような連続写像のことである。

問題． $k < n-1$ ならば、$\pi_k(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}, b_{\mathbf{R}^n\setminus\{0\}}) \cong 0$ であることを示せ。
$k < n$ ならば、$\pi_k(S^n, b_{S^n}) \cong 0$ であることを示せ。