n変数1階線形同次微分方程式

2変数1階線形同次微分方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対しては、$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ を A に対してうまくとれば、$P^{-1}AP$ が、$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のように書かれる。そこで、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と座標変換すると、$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ は、$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ のように計算される。さらに、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ は，$P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$,
$P\begin{pmatrix} e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t \\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, $P\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ のように計算される。

このことから、2変数1階線形同次微分方程式の解の性質として、次のことがわかる。

- 解の定数倍、2つの解の和は解である。(解全体はベクトル空間になる。)
- 解は、初期値 $\vec{x}^0$ により一意的に定まり、初期値ついて線形である。(解の空間の次元は2である。)
- 解に現れる関数は、A の固有方程式の固有値によりわかる。

このうちの最初の2つの性質は、方程式を解かなくてもわかることである。
さて、n 変数の場合に同様の問題を考えるために、次のように計算してみる。

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda_1 t)^n & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda_2 t)^n \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{n!}(\lambda_1 t)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!}(\lambda_2 t)^n \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n$$

この最後の行列に、$\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ を代入すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix})^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p\begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p\frac{t^q}{q!}\begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q$$
$$= (\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p)(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{t^q}{q!}\begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}^q)$$

ここで、

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}^p=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\mu^p & 0\\ 0 & \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\mu^p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\mu t} & 0\\ 0 & e^{\mu t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -\nu\\ \nu & 0\end{pmatrix}^{2q}=\begin{pmatrix}(-1)^q\nu^{2q} & 0\\ 0 & (-1)^q\nu^{2q}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -\nu\\ \nu & 0\end{pmatrix}^{2q+1}=\begin{pmatrix}0 & -(-1)^q\nu^{2q+1}\\ (-1)^q\nu^{2q+1} & \end{pmatrix}$$

だから、

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{t^q}{q!}\begin{pmatrix}0 & -\nu\\ \nu & 0\end{pmatrix}^q &= \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(2q)!}(t\nu)^{2q} & \displaystyle-\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(2q+1)!}(t\nu)^{2q+1}\\ \displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(2q+1)!}(t\nu)^{2q+1} & \displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(2q)!}(t\nu)^{2q}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\nu t & -\sin\nu t\\ \sin\nu t & \cos\nu t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

従って、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix}\mu & -\nu\\ \nu & \mu\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}e^{\mu t} & 0\\ 0 & e^{\mu t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\nu t & -\sin\nu t\\ \sin\nu t & \cos\nu t\end{pmatrix}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix})^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!q!}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^p\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^q=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^p\frac{t^q}{q!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^q\\ &= (\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^p)(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{t^q}{q!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^q)=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

行列の指数関数

そこで、一般の $n\times n$ 行列 A に対し、

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$$

と定義する。

これは、行列 A に対して、$e^A=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ と定義したものに、tA を代入したものでもある。

まず、級数の収束を示す。

$A=(a_{ij})$ とし、$\max\limits_{ij}\{|a_{ij}|\}\leqq M$ とする。A^k の成分 $a_{ij}^{(k)}$ について、$\max\limits_{ij}\{|a_{ij}^{(k)}|\}\leqq n^{k-1}M^k$ であることが数学的帰納法で示される。実際、A^k の成分についての不等式

を仮定すると、

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = |\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k+1)} a_{\ell j}| \leqq n \cdot n^{k-1} M^k M = n^k M^{k+1}$$

を得る。

$e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ の ij 成分は $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$ であるが、$|\dfrac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}| \leqq \dfrac{1}{k!} n^{k-1} M^k$ だから、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$ は $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k$ を優級数に持つ。$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} M^k = \frac{1}{n} e^{nM}$ で優級数が収束するから、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ は収束する。

この収束は、A の成分が有界である範囲（$\max_{ij}\{|a_{ij}|\} \leqq M$ となる行列全体）で一様である。従って、e^A は A の成分について連続な関数となる。

行列の指数関数の性質

e^A は次の性質を持つ。

- $AB = BA$ ならば $e^{A+B} = e^A e^B$.
- $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$

実際、次のように計算される。

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!q!} A^p B^q \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p \frac{1}{q!} B^q = (\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} A^p)(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} B^q) = e^A e^B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{PAP^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (PA^k P^{-1}) \\ &= P(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k) P^{-1} = P e^A P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = A e^{tA} \\ &= (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k) A = e^{tA} A \end{aligned}$$

同次方程式の形式的解法

行列の指数関数を使うと、線形同次微分方程式は形式的にはすぐに解かれる。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = A\vec{x}$ に対し、$t=0$ で初期値 $\vec{x}^0$ をとる解は、$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}^0$ で与えられる。実際、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA}\vec{x}^0 = Ae^{tA}\vec{x}^0 = A\vec{x}(t)$$

２行２列の A に対して、この e^{tA} の具体的な形を、$P^{-1}AP$ の形を標準形にして $e^{tA} = Pe^{tP^{-1}AP}P^{-1}$ により求めた。

ジョルダン標準形

$n \times n$ 行列の固有多項式は n 次多項式である。これは実数係数の n 多項式であるから、ガウスの代数学の基本定理により、１次式の積に因数分解される。複素数解は、共役なものが同じ次数で現れる。

ジョルダンブロックとは次の形の行列である。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

この $k \times k$ 行列の固有多項式は $(\lambda - a)^k$ である。ジョルダンの定理とは $n \times n$ 実行列 A に対して、$n \times n$ 複素行列 P をとって、$P^{-1}AP$ がジョルダンブロックの直和（ジョルダン標準形）となるようにできる。共役複素数を固有値とするジョルダンブロックの数は、大きさを含め等しい。

この結果、2×2 実行列の場合は、$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mu + \nu i & 0 \\ 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の３通りのジョルダン標準形があることになる。なお、

$$\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu + \nu i & 0 \\ 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$$

である。

3×3 実行列の場合は $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の４通りである。

4×4 実行列の場合は $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \nu i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \nu i \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} \mu_1 + \nu_1 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 - \nu_1 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 + \nu_2 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 - \nu_2 i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu+\nu i & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu-\nu i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\mu+\nu i & 1 & 0 & 0\\ 0 & \mu+\nu i & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu-\nu i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \mu-\nu i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$ の９通りである。

ジョルダンブロックについての指数関数は

$$\exp(t\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1\\ 0 & \dots & \dots & 0 & a\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}e^{at} & te^{at} & \frac{t^2}{2!}e^{at} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{at}\\ 0 & e^{at}a & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{at}\\ \vdots & \ddots & \ddots & e^{at} & te^{at}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{at}\end{pmatrix}$$

となる。なお、

$$\begin{aligned}\exp(t\begin{pmatrix}\mu & -\nu\\ \nu & \mu\end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(\mu+\nu i)t} & 0\\ 0 & e^{(\mu-\nu i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{i}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{e^{(\mu+\nu i)t}+e^{(\mu-\nu i)t}}{2} & -\dfrac{e^{(\mu+\nu i)t}-e^{(\mu-\nu i)t}}{2i}\\ \dfrac{e^{(\mu+\nu i)t}-e^{(\mu-\nu i)t}}{2i} & \dfrac{e^{(\mu+\nu i)t}+e^{(\mu-\nu i)t}}{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{\mu t}\cos\nu t & -e^{\mu t}\sin\nu t\\ e^{\mu t}\sin\nu t & e^{\mu t}\cos\nu t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

この結果、A の固有値が実数 λ, 複素数 $\mu+\nu i$ を持つとき、e^{tA} は、$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}, e^{\mu t}\cos\nu t, e^{\mu t}\sin\nu t, te^{\mu t}\cos\nu t, te^{\mu t}\sin\nu t, \dots, t^{k-1}e^{\mu t}\cos\nu t, t^{k-1}e^{\mu t}\sin\nu t$ の線形結合で書かれる。ただし k は，固有値 $\lambda, \mu+\nu i$ のジョルダンブロックの最大の大きさである。

参考。[YE]　p.84–93.

非同次線形微分方程式、定数変化法

非同次線形微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ について、解の存在、一意性はわかっている。

２つの非同次方程式の解 $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)$ に対して、$\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)$ は同次方程式の解である。従って、$t=0$ で $\vec{x}^0$ となる $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ の解は $t=0$ で $\vec{0}$ をとる解と $e^{tA}\vec{x}^0$ の和である。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$. の解を探す。$e^{tA}\vec{x}^0$ が同次方程式の解とする。そこで、$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{X}(t)$ の形の解を探す。

$$Ae^{tA}\vec{X}(t) + e^{tA}\frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t} = Ae^{tA}\vec{X}(t) + \vec{b}(t)$$

だから、

$$e^{tA}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{X}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{b}(t)$$

従って、$X(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-tA}\overrightarrow{b}(t)\mathrm{d}t$ とし、$\overrightarrow{x}(t) = e^{tA}\overrightarrow{X}(t) + e^{tA}\overrightarrow{x}^0$ が解である。

$\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{y}$ と座標変換して、$P^{-1}AP$ が標準形とする。微分方程式は、$P\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{y} = AP\overrightarrow{y} + \overrightarrow{b}(t)$ すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{y} = P^{-1}AP\overrightarrow{y} + P^{-1}\overrightarrow{b}(t)$ となる。$\overrightarrow{y}(t) = e^{tP^{-1}AP}\overrightarrow{Y}(t)$ の形で解を探す。

$$P^{-1}APe^{tP^{-1}AP}Y(t) + e^{tP^{-1}AP}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{Y}}{\mathrm{d}t} = P^{-1}APe^{tP^{-1}AP}\overrightarrow{Y}(t) + P^{-1}\overrightarrow{b}(t)$$

だから、

$$e^{tP^{-1}AP}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{Y}}{\mathrm{d}t} = P^{-1}\overrightarrow{b}(t)$$

従って、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Y}(t) &= \int_0^t e^{-tP^{-1}AP}P^{-1}\overrightarrow{b}(t)\mathrm{d}t \\
\overrightarrow{y}(t) &= e^{tP^{-1}AP}\int_0^t e^{-tP^{-1}AP}P^{-1}\overrightarrow{b}(t)\mathrm{d}t \\
\overrightarrow{x}(t) &= Pe^{tP^{-1}AP}\int_0^t e^{-tP^{-1}AP}P^{-1}\overrightarrow{b}(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

である。

例． $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$

$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+5 & 4 \\ -10 & \lambda-7 \end{pmatrix} = (\lambda+5)(\lambda-7)+4\cdot 10 = \lambda^2-2\lambda+5 = (\lambda-1-2i)(\lambda-1+2i)$$

ここでは複素数の範囲で対角化しよう。固有値 $1+2i$, $1-2i$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 3+i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3-i \end{pmatrix}$ であり、

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix}$ とすると、$P^{-1} = \dfrac{1}{4i}\begin{pmatrix} 3-i & 2 \\ -3-i & -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1-3i & -2i \\ -1+3i & 2i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}\overrightarrow{y} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1-3i & -2i \\ -1+3i & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

となる。次のように計算しておく方が都合が良い。

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1-3i & -2i\\ -1+3i & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1-3i & -2i\\ -1+3i & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\\ \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(-1-3i)\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}-e^{it}+e^{-it}\\ (-1+3i)\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+e^{it}-e^{-it}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}(-3-3i)e^{it}+(1-3i)e^{-it}\\ (1+3i)e^{it}+(-3+3i)e^{-it}\end{pmatrix}$$

$t=0$ で $\vec{y}=\vec{0}$ となる解を、$\vec{y}(t)=\exp(t\begin{pmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{pmatrix})\begin{pmatrix}Y_1(t)\\ Y_2(t)\end{pmatrix}$ の形で求めると、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}Y_1(t)\\ Y_2(t)\end{pmatrix} &= \int_0^t \exp(-t\begin{pmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{pmatrix})\frac{1}{8}\begin{pmatrix}(-3-3i)e^{it}+(1-3i)e^{-it}\\ (1+3i)e^{it}+(-3+3i)e^{-it}\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{8}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{(-1-2i)t} & 0\\ 0 & e^{(-1+2i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3-3i)e^{it}+(1-3i)e^{-it}\\ (1+3i)e^{it}+(-3+3i)e^{-it}\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{8}\int_0^t\begin{pmatrix}(-3-3i)e^{(-1-i)t}+(1-3i)e^{(-1-3i)t}\\ (1+3i)e^{(-1+3i)t}+(-3+3i)e^{(-1+i)t}\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}\left[3e^{(-1-i)t}+\dfrac{1-3i}{-1-3i}e^{(-1-3i)t}\right]_0^t\\ \left[\dfrac{1+3i}{-1+3i}e^{(-1+3i)t}+3e^{(-1+i)t}\right]_0^t\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{40}\begin{pmatrix}15e^{(-1-i)t}+(4+3i)e^{(-1-3i)t}-(19+3i)\\ (4-3i)e^{(-1+3i)t}+15e^{(-1+i)t}-(19-3i)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} &= \frac{1}{40}\begin{pmatrix}e^{(1+2i)t} & 0\\ 0 & e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15e^{(-1-i)t}+(4+3i)e^{(-1-3i)t}-(19+3i)\\ (4-3i)e^{(-1+3i)t}+15e^{(-1+i)t}-(19-3i)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{40}\begin{pmatrix}15e^{it}+(4+3i)e^{-it}-(19+3i)e^{(1+2i)t}\\ (4-3i)e^{it}+15e^{-it}-(19-3i)e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

従って、$\vec{y}^0=P^{-1}\vec{x}^0$ を初期値とする解は、$\begin{pmatrix}e^{(1+2i)t} & 0\\ 0 & e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}P^{-1}\vec{x}^0+\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$ となる。$\vec{x}^0$ を初期値とする解は、

$$P\begin{pmatrix}e^{(1+2i)t} & 0\\ 0 & e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}P^{-1}\vec{x}^0+P\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& P\begin{pmatrix}e^{(1+2i)t} & 0\\ 0 & e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}P^{-1}\vec{x}^0\\
=\ & \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3+i & 3-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(1+2i)t} & 0\\ 0 & e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-3i & -2i\\ -1+3i & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}\\
=\ & \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2e^{(1+2i)t} & -2e^{(1-2i)t}\\ (3+i)e^{(1+2i)t} & (3-i)e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1-3i & -2i\\ -1+3i & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}\\
=\ & \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(2+6i)e^{(1+2i)t}+(2-6i)e^{(1-2i)t} & 4ie^{(1+2i)t}-4ie^{(1-2i)t}\\ -10ie^{(1+2i)t}+10ie^{(1-2i)t} & (2-6i)e^{(1+2i)t}+(2+6i)ie^{(1-2i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}\\
=\ & \begin{pmatrix}\dfrac{e^{(1+2i)t}+e^{(1-2i)t}}{2}-3\dfrac{e^{(1+2i)t}-e^{(1-2i)t}}{2i} & -2\dfrac{e^{(1+2i)t}-e^{(1-2i)t}}{2i}\\ 5\dfrac{e^{(1+2i)t}-e^{(1-2i)t}}{2i} & \dfrac{e^{(1+2i)t}+e^{(1-2i)t}}{2}+3\dfrac{e^{(1+2i)t}-e^{(1-2i)t}}{2i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}\\
=\ & \begin{pmatrix}e^t\cos 2t-3e^t\sin 2t & -2e^t\sin 2t\\ 5e^t\sin 2t & e^t\cos 2t+3e^t\sin 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\ x_2^0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& P\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3+i & 3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15e^{it} + (4+3i)e^{-it} - (19+3i)e^{(1+2i)t} \\ (4-3i)e^{it} + 15e^{-it} - (19-3i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \\
= \quad & \frac{1}{40}\begin{pmatrix} (-38-6i)e^{-it} + (-38+6i)e^{it} + ((38+6i)e^{(1+2i)t} + (38-6i)e^{(1-2i)t}) \\ (54+2i)e^{it} + (54-2i)e^{-it} - ((54+28i)e^{(1+2i)t} + (54-28i)e^{(1-2i)t}) \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} -\frac{19}{10}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} - \frac{3}{10}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + \frac{19}{10}\frac{e^{(1+2i)t}+e^{(1-2i)t}}{2} - \frac{3}{10}\frac{e^{(1+2i)t}-e^{(1-2i)t}}{2i} \\ \frac{27}{10}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} - \frac{1}{10}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} - \frac{27}{10}\frac{e^{(1+2i)t}+e^{(1-2i)t}}{2} + \frac{7}{5}\frac{e^{(1+2i)t}-e^{(1-2i)t}}{2i} \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} -\frac{19}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t + \frac{19}{10}e^t\cos 2t - \frac{3}{10}e^t\sin 2t \\ \frac{27}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t - \frac{27}{10}e^t\cos 2t + \frac{7}{5}e^t\sin 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$