

常微分方程式の解の存在と一意性の定理

ベクトル場と正規形の常微分方程式

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (あるいは一般に, \vec{x} を n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の点) とする。点 \vec{x}

が時刻 t に依存して運動しているとき、その微分はベクトル $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$

となる。平面の各点 (あるいは \mathbf{R}^n 内の領域の各点) にベクトル $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ が与えられているときにベクトル場が与えられているという。

常微分方程式 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$, すなわち $\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ を考える。

この常微分方程式の解とは、 $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ で、 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t))$, すなわち

$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{pmatrix}$ を満たすものである。解曲線と呼ぶ。

ベクトル場は時刻により変化しないものを考えるのが普通であるが、時刻により変化するベクトル場に対して同様の考察をすることもある。

平面の各点 (あるいは \mathbf{R}^n 内の領域の各点) に時刻に依存するベクトル $\vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$ が与えられているときに時刻に依存するベクトル場が与えられているという。

常微分方程式 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$, すなわち $\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$ は、正規形の

1階微分方程式と呼ばれる。正規形とは、微分の項について解かれているということである。時刻に依存するベクトル場とまったく同じものである。

高階の微分方程式と連立微分方程式

n 階の常微分方程式は $\frac{d^n x}{dt^n}$ について解かれている形、 $\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$ の時に正規系であるといふ。

この方程式は、 $y_1 = x, y_2 = \frac{dx}{dt}, \dots, y_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ とおくことにより、連立微分

$$\text{方程式} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n \\ \frac{dy_n}{dt} = f(t, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right. , \text{あるいは} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \text{と同値}$$

である。

例えば 2 階の場合、 $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt})$ は、 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ f(t, y_1, y_2) \end{pmatrix}$ と同値である。

従って、正規形の高階微分方程式の理論は、正規形の 1 階微分方程式の理論に含まれることになる。

正規形の 1 階微分方程式 $\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$ の初期値問題とは、時刻

$t = t_0$ のとき、与えられた点 $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ を通る解 $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ，すなわち、

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

を満たすものを求める問題である。

正規形の 2 階微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, \frac{dx}{dt})$ の初期値問題には、 $x(t_0) = x^0, \frac{dx}{dt} = v^0$ を与える必要がある。「状態」を表している $\begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix}$ の空間を「相空間」と呼ぶ。

常微分方程式の解の存在と一意性の定理

定理。 \mathbf{R}^n の球体 $\{\|\vec{x} - \vec{x}^0\| < a\}$ 上で定義された正規形の常微分方程式 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$ において、 $\vec{f}(t, \vec{x})$ は有界 ($\|\vec{f}(t, \vec{x})\| \leq M$) であり、 $\vec{f}(t, \vec{x})$ が次のリプシッツ条件を満たしているとする。

$$\text{ある定数 } L \text{ が存在し, } \|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y})\| \leq L\|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

このとき、 $\varepsilon_0 = \min\{\frac{1}{2L}, \frac{a}{2M}\}$ に対して $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ で定義された解 $\vec{x}(t)$ が存在する。

証明。積分方程式 $\vec{x}(t) = \vec{x}^0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{x}(s))ds$ を考える。

$$\vec{x}_0(t) = \vec{x}^0, \vec{x}_k(t) = \vec{x}^0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{x}_{k-1}(s))ds \text{ という形で } \vec{x}_k(t) \text{ を定義すると、}$$

このベクトル値関数の列は $\vec{x}_\infty(t)$ に収束し、 $\vec{x}_\infty(t)$ は積分方程式の解であることを示す。

実際、 $\vec{x}_k(t)$ が、 $\|\vec{x}_k(t) - \vec{x}^0\| < a$ を満たしているとする
 $\vec{x}_{k+1}(t) - \vec{x}_k(t) = \int_{t_0}^t \{\vec{f}(s, \vec{x}_k(s)) - \vec{f}(s, \vec{x}_{k-1}(s))\} ds$ だから、

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_{k+1}(t) - \vec{x}_k(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \sup_s \|\vec{f}(s, \vec{x}_k(s)) - \vec{f}(s, \vec{x}_{k-1}(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \sup_s \|\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s)\| ds \right| \\ &\leq \varepsilon_0 L \sup_s \|\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s)\| = \frac{1}{2} \sup_s \|\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s)\| \end{aligned}$$

また、 $\|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \sup_s \|\vec{f}(s, \vec{x}^0)\| ds \right| \leq \varepsilon_0 M \leq \frac{a}{2}$ であるから、

$\|\vec{x}_{k+1}(t) - \vec{x}_k(t)\| \leq 2^{-k} \frac{a}{2}$ である。従って、

$$\|\vec{x}_k(t) - \vec{x}^0\| \leq \sum_{i=1}^{k-1} \|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_{i-1}(t)\| < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i+1} \frac{a}{2} = a$$

であり、 $\vec{x}_k(t)$ は、 $\|\vec{x}_k(t) - \vec{x}^0\| < a$ を満たしている。このベクトル値関数の列 $\vec{x}_k(t)$ に対し、 $\vec{x}_\infty(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k(t)$ とすると、 $\vec{x}_\infty(t)$ は、連続関数 $\vec{x}_k(t)$ の一様収束極限であるから連続関数であり、積分と極限の交換が出来て、

$$\vec{x}_\infty(t) = \vec{x}^0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(s, \vec{x}_\infty(s)) ds$$

を満たす。従って、 $\vec{x}_\infty(t)$ は微分可能で、 $\frac{d\vec{x}_\infty(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}_\infty(t))$, $\vec{x}_\infty(t_0) = \vec{x}^0$ を満たす。

このような解はただ1つに限る。実際、 $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ がともに初期値 \vec{x}^0 をもつ解とすると、積分方程式の差を見ると

$$\begin{aligned} \|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \sup_s \|\vec{f}(s, \vec{x}(s)) - \vec{f}(s, \vec{y}(s))\| ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_s \|\vec{x}(s) - \vec{y}(s)\| \end{aligned}$$

$\sup_s \|\vec{x}(s) - \vec{y}(s)\| > 0$ とすると、 $\|\vec{x}(t) - \vec{y}(t)\| > \frac{1}{2} \sup_s \|\vec{x}(s) - \vec{y}(s)\|$ となる t をとれば、上の不等式と矛盾する。

参考。[YE] p.181-189.

この証明を吟味すると、解は初期値 \vec{x}^0 に連続に依存することがわかる。また、パラメータ λ について連続に変化する正規形の微分方程式 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}_\lambda(t, \vec{x})$ において、初期値 \vec{x}^0 を持つ解は、パラメータ λ に連続に依存することもわかる。

さらに、 $\vec{f}_\lambda(t, \vec{x})$ が無限回連続偏微分可能ならば、解は、初期値についても、パラメータ λ に対しても無限回連続偏微分可能となる。

パラメータに対する解の連続性から、ロトカ・ボルテラのベクトル場の解曲線が、ベクトル場の零点の近傍では、線形方程式の解で近似されることになる。

線形の微分方程式 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, すなわち
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$
 はリプシッツ条件

を満たす。

例題 (難しい) \mathbb{R}^n 全体で定義されたリプシッツ条件を満たす $\vec{f}(\vec{x})$ に対して、正規形の微分方程式 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ を考える。

(1) ある $\varepsilon_1 > 0$ に対して、任意の \vec{x}^0 を初期値とする解は、 $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$ で定義されることを示せ。

(2) $t = 0$ で $\vec{x}(0) = \vec{x}^0$ となる解を $\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0)$ とする。 $t = t_0$ で $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$ となる解は、 $\vec{\varphi}_{t-t_0}(\vec{x}^0)$ で表されることを示せ。

(3) 任意の \vec{x}^0 を初期値とする解は、 $(-\infty, \infty)$ で定義されることを示せ。

(4) $\vec{\varphi}_s(\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0)) = \vec{\varphi}_{s+t}(\vec{x}^0)$ を示せ。

解答例. (1) $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leq L\|\vec{x} - \vec{y}\|$ とすると、 $\|\vec{f}(\vec{x})\| \leq \|\vec{f}(0)\| + L\|\vec{x}\|$. 従って、 $\|\vec{x}^0\| \leq R$ なる \vec{x}^0 を中心とする半径 R の球体 $\{\|\vec{x} - \vec{x}^0\| < R\}$ 上で、 $\|\vec{f}\| \leq \|\vec{f}(0)\| + 2LR$ である。従って $\varepsilon_0 \leq \min\left\{\frac{1}{2L}, \frac{R}{2(\|\vec{f}(0)\| + 2LR)}\right\}$ に対して、 $(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0)$ で定義された

解が存在する。 $\|\vec{f}(0)\| < 2LR$ となる R をとれば、解は $\varepsilon_1 = \frac{1}{8L}$ に対して、 $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1)$ で定義される。

(2) $\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0)$ は、 $\frac{d}{dt}\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0) = \vec{f}(\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0))$, $\vec{\varphi}_0(\vec{x}^0) = \vec{x}^0$ を満たす。

$t_0 - \varepsilon_1 < t < t_0 + \varepsilon_1$ のとき、 $-\varepsilon_1 < t - t_0 < \varepsilon_1$. $\vec{\varphi}_{t-t_0}(\vec{x}^0)$ は $\frac{d}{dt}\vec{\varphi}_{t-t_0}(\vec{x}^0) = \vec{f}(\vec{\varphi}_{t-t_0}(\vec{x}^0))$ を満たす。 $\vec{\varphi}_{t_0-t_0}(\vec{x}^0) = \vec{\varphi}_0(\vec{x}^0) = \vec{x}^0$ であるから、微分方程式の解の一意性から、 $t = t_0$ で $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^0$ となる解は、 $\vec{\varphi}_{t-t_0}(\vec{x}^0)$ で表される。

(3) $k \geq 1$ のとする。 $(0, \frac{(k+1)\varepsilon_1}{2})$ 上で $\varphi_t(\vec{x}^0)$ が定義されているとき、

$(\frac{(k-2)\varepsilon_1}{2}, \frac{(k+2)\varepsilon_1}{2})$ 上で $\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0) = \vec{\varphi}_{t-\frac{k\varepsilon_1}{2}}(\vec{\varphi}_{\frac{k\varepsilon_1}{2}}(\vec{x}^0))$ とおくと、(2) から、

$(\frac{(k-2)\varepsilon_1}{2}, \frac{(k+1)\varepsilon_1}{2})$ 上では、 $\vec{\varphi}_t$ の定義は一致している。従って $(0, \infty)$ 上で定義される。

同様に、 $(-\frac{(k+1)\varepsilon_1}{2}, 0)$ 上で $\varphi_t(\vec{x}^0)$ が定義されているとき、 $(-\frac{(k+2)\varepsilon_1}{2}, -\frac{(k-2)\varepsilon_1}{2})$ 上

で $\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0) = \vec{\varphi}_{t-\frac{k\varepsilon_1}{2}}(\vec{\varphi}_{\frac{k\varepsilon_1}{2}}(\vec{x}^0))$ とおくと、(2) から、 $(-\frac{(k+1)\varepsilon_1}{2}, -\frac{(k-2)\varepsilon_1}{2})$ 上では、

$\vec{\varphi}_t$ の定義は一致し、 $(-\infty, 0)$ 上で定義される。このように一意性を用いて、解の定義域を大きくしていくことを解の接続と呼ぶ。

(4) s を変数とみて $\frac{d}{ds}\vec{\varphi}_{s+t}(\vec{x}^0) = \vec{f}(\vec{\varphi}_{s+t}(\vec{x}^0))$, $s = 0$ として $\vec{\varphi}_{0+t}(\vec{x}^0) = \vec{\varphi}_t(\vec{x}^0)$ だ

から、 $\vec{\varphi}_{s+t}(\vec{x}^0)$ は $s = 0$ のときに $\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0)$ を初期値とする $\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{f}(\vec{x})$ の解である。従って

解の一意性から $\vec{\varphi}_s(\vec{\varphi}_t(\vec{x}^0)) = \vec{\varphi}_{s+t}(\vec{x}^0)$ となる。このような写像 $\vec{\varphi}_t$ はフローと呼ばれる。

参考. [YE] p.133-140.