4. **５月１０日**

曲線族と微分方程式の例

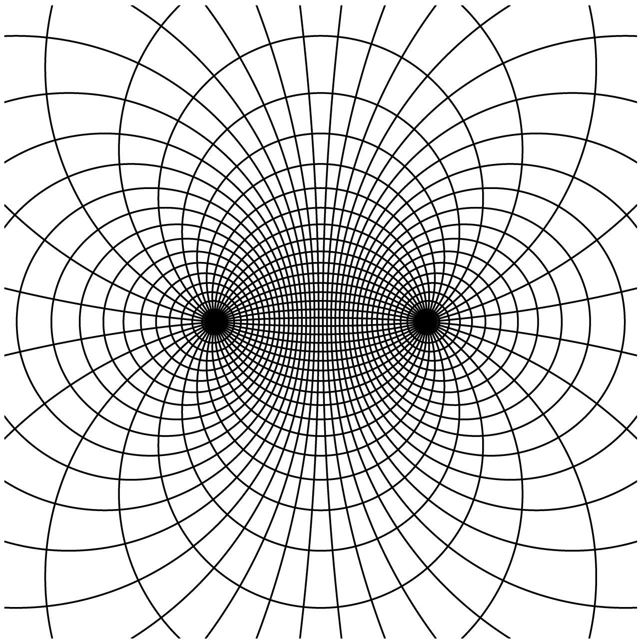
$(1,0), (-1,0)$ への距離の比が一定の曲線。（アポロニウスの円）

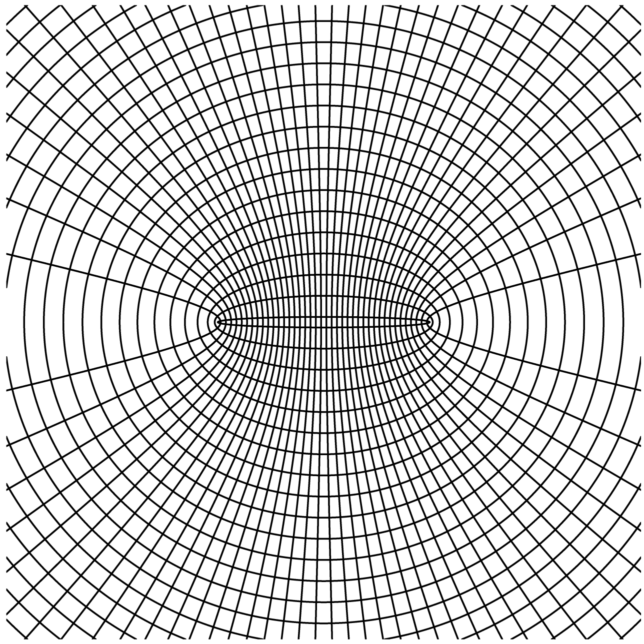
その方程式は C を比を表す定数として $(x-1)^2+y^2 = C((x+1)^2+y^2)$. 両辺を微分すると $x-1+yy' = C(x+1+yy')$ だから、これらの２つの式から C を消去して微分方程式 $(x+1+yy')((x-1)^2+y^2) = (x-1+yy')((x+1)^2+y^2)$, $(x^2-1)(-2)+2y^2 = yy'(4x)$, すなわち $y' = \dfrac{-x^2+y^2+1}{2xy}$ を得る。

$(1,0), (-1,0)$ を通る円。（円周角一定の円）

$x^2+(y-c)^2 = c^2+1$. すなわち、$x^2+y^2-2cy = 1$. $2x+2yy'-2cy' = 0$ だから、微分方程式 $(x^2+y^2-1)y' = 2xy+2y^2y'$, すなわち $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2-1}$ を得る。

これらの曲線族は直交している。（微分方程式からわかる。）





共焦点楕円族、双曲線族

$(\pm 1,0)$ を焦点とする楕円、双曲線は、$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x+1)^2+y^2} = C$ で表される。両辺を微分して、曲線族の微分方程式 $\dfrac{x-1+yy'}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \pm \dfrac{x+1+yy'}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 0$ が得られる。

これらの曲線族は直交している。実際、微分方程式は
$\sqrt{(x+1)^2+y^2}(x-1+yy') \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2}(x+1+yy') = 0$, すなわち
$(\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-1)^2+y^2})yy' + (x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm (x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 0$ と書き直される。このとき、

$$\frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2}+(x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2})}\frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2+y^2}-(x+1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2})} = -1$$

となる。(分子 $(x-1)^2((x+1)^2+y^2)-(x+1)^2((x-1)^2+y^2) = -4xy^2$
分母 $y^2(((x+1)^2+y^2)-((x-1)^2+y^2) = 4xy^2$ である。)

平面上の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$ で与えられる曲線族に直交する曲線族は
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{f(x,y)}$ あるいは、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -f(x,y)$ であたえられる。

問　[YE] p.10 問 1.5, 1.6.

連立微分方程式

原点を中心とする同心円を $(r\cos t, r\sin t)$ のように表示すると、
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\sin t = -y,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\cos t = x$ を満たすから、同心円は、連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \end{cases}$ を満たしている。

例。Lotka-Volterra 方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (a_1 + b_1 u + c_1 v)u \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (a_2 + b_2 u + c_2 v)v \end{cases}$

これは、平面上の点 (u,v) の変化を表していると考えるのが良い。

ベクトル場

一般に、平面上の点 (x,y) の変化の割合が点 (x,y) によって定まっていることは $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x,y) \end{cases}$ と表記される。これは、平面上のベクトル場を与えている。

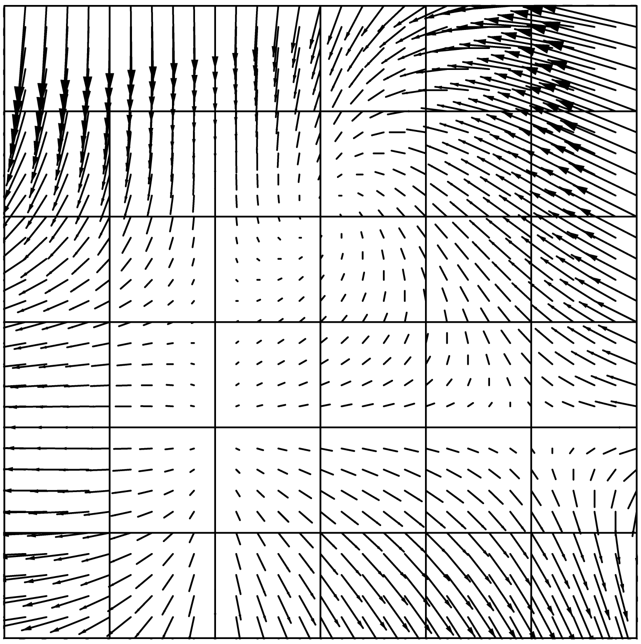
曲線 $(a(t),b(t))$ は, $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = f(a(t),b(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = g(a(t),b(t)) \end{cases}$ を満たすときに、この微分方程式の解である。

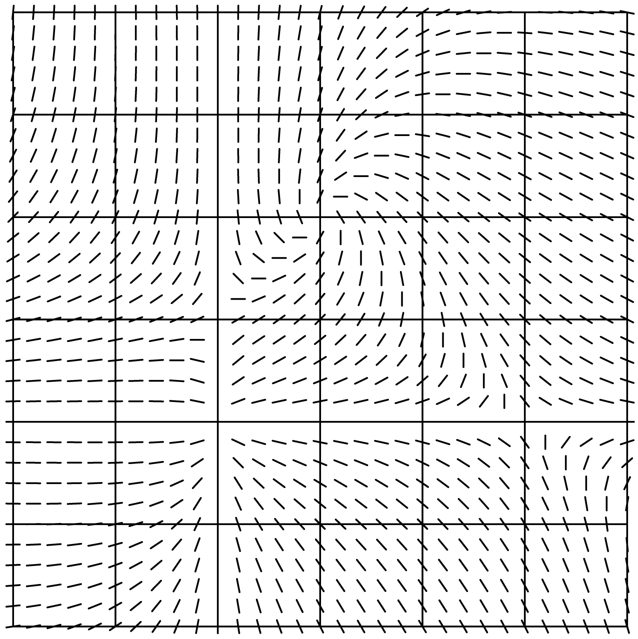
時間の進み方を k 倍にした曲線 $(a(kt),b(kt))$ は、$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a(kt)}{\mathrm{d}t} = k\,f(a(kt),b(kt)) \\ \dfrac{\mathrm{d}b(kt)}{\mathrm{d}t} = k\,g(a(kt),b(kt)) \end{cases}$ を満たすから、
$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k\,f(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k\,g(x,y) \end{cases}$ の解である。

解曲線を軌道と呼ぶこともある。ベクトル場をスカラー倍しても、軌道の形は変わらない。

平面上のベクトル場を描くと、おおよその軌道の様子が見てとれることが多い。

ロトカ・ボルテラ方程式 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (3-u-v)u \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (1+u-v)v \end{cases}$ について描いてみよう。





左の図は、各点にベクトルを（縮小して）描いたもの。右の図は、各点のベクトルの向きを小線分で表したものである。ひとつの小正方形の１辺の長さは１で、

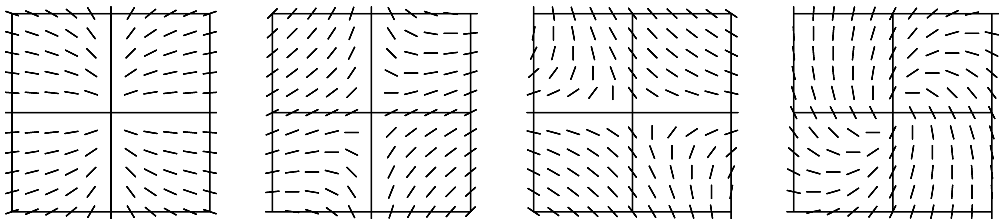
$$[-2,4]\times[-2,4]=\{(x,y)\ \big|\ -2\leqq x\leqq 4,-2\leqq x\leqq 4\}$$

の範囲を描いたものである。直線 $u=0$, $v=-u+3$, $v=0$, $v=u+1$ を書き込むと良い。

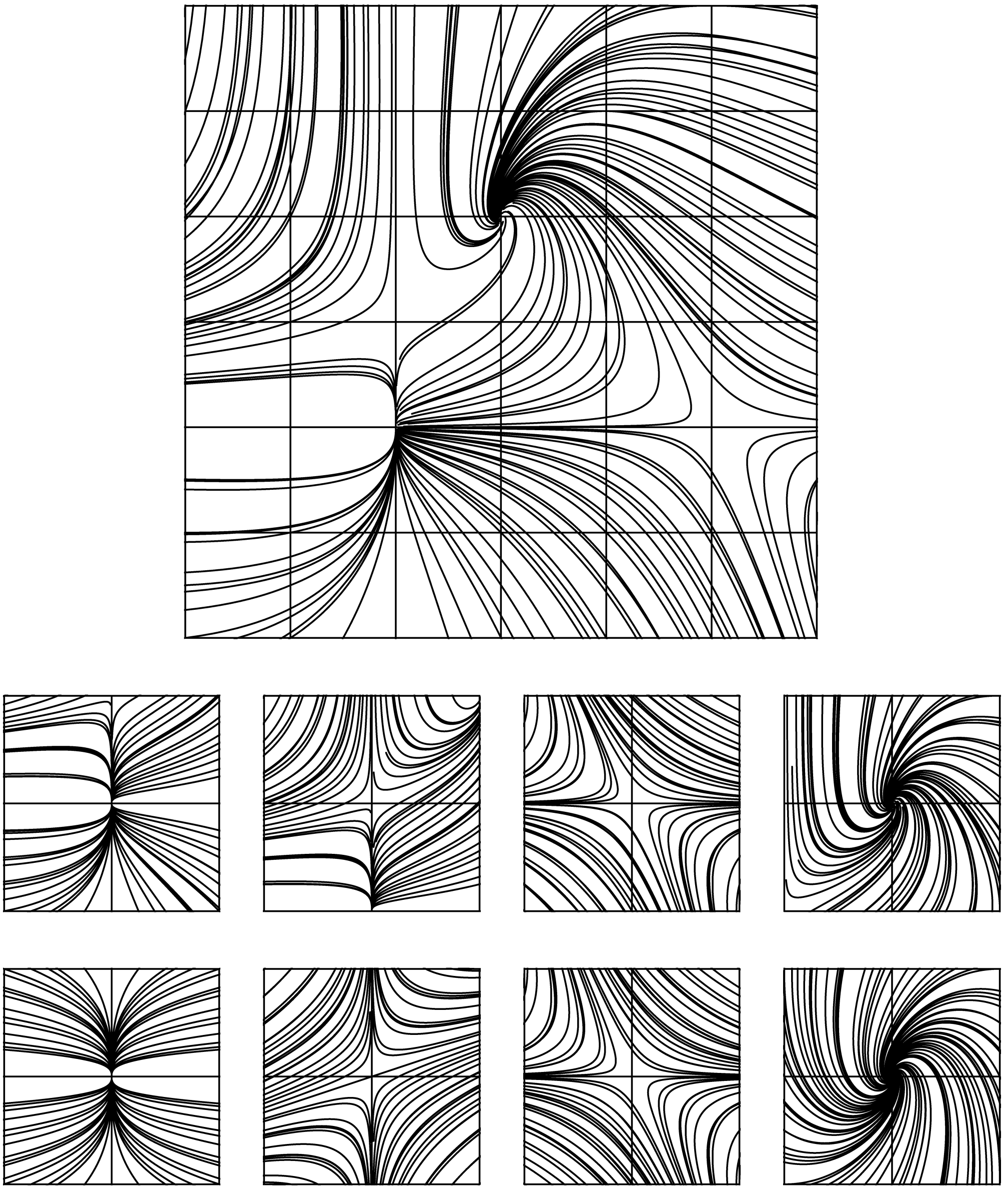
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ となる点は、$(0,0)$, $(0,1)$, $(3,0)$, $(1,2)$.

それぞれの点 (a,b) で、$u=a+\widehat{u}$, $v=b+\widehat{v}$ として、１次の項を取り出すとつぎの連立線形微分方程式が得られる。

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=3\widehat{u}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\widehat{v}}{\mathrm{d}t}=\widehat{v}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=2\widehat{u}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\widehat{u}-\widehat{v}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=-3\widehat{u}-3\widehat{v}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4\widehat{v}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=-\widehat{u}-\widehat{v}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2\widehat{u}-2\widehat{v}\end{cases}$$



これらの線形のベクトル場の方向を表した４つの図ともとのベクトル場が 0 となる４点の近くの様子を比較すると良い。



それぞれの解曲線の様子を図示したものである。中の４つの図は、Lotka-Vorterra ベクトル場の零点の周り、下の４つの図は、線形方程式の様子である。これらの解曲線は、ベクトル場の零点の近くでは、ほとんど同じ形である。

ここでの図の描き方は、十分の小さな時間間隔についての「折れ線近似」である。

実際の解を、知られている関数で書き表すことは、滅多に出来ない。しかし、この図を見ると、「解は存在する。また、１つの微分方程式を近似している微分方程式の解は、もとの微分方程式の解に近い。」ということが成立していると思われる。

これを定式化するのが、常微分方程式の解の存在と一意性の定理である。