3. 4月２６日

不変な多変数関数が見つかる場合（全微分方程式あるいは完全微分方程式）

２変数関数の偏微分

$f(x,y)$ について、x についての偏微分を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, y についての偏微分を $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ で表す。x, y が t の関数 $x(t)$, $y(t)$ であるとき、

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t),y(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$$

となる。y が x の関数 $y(x)$ であれば、

$$\frac{\mathrm{d}f(x,y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$$

となる。

$\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$ の形の式を $f(x,y)$ の**全微分**とよぶ。一般に、$g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ の形のものを１次微分形式または微分１形式とよぶ。与えられた微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ に対して、それが $\mathrm{d}f(x,y)$ の形のものかどうかを問う問題が考えられる。

これは、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x,y)$ をともに満たす f を求める問題である。

f が２回連続微分可能であれば、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ であるから、

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$$

であることが必要である。これを**積分可能条件**と呼ぶ。積分可能条件を満たす微分１形式は**閉形式**と呼ばれる。全微分 $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$ となっている微分１形式は**完全形式**と呼ばれる。

問題は、与えられた微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ が、積分可能条件を満たすとき（閉形式であるとき）、完全形式であるかということである。

平面全体で定義された連続微分可能関数 $g(x,y)$, $h(x,y)$ については積分可能条件 $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ が、完全形式であるための十分条件であることが知られている。

実際、そのような $f(x,y)$ があれば、

$$f(x,y) - f(0,0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(xt,yt)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \{\frac{\partial f}{\partial x}(xt,yt)x + \frac{\partial f}{\partial x}(xt,yt)y\}\mathrm{d}t$$

を満たすから、積分可能条件を満たす微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ に対して、

$$f(x,y) = \int_0^1 \{g(tx,ty)x + h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t$$

とすればよい。

実際、

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^1 \{g(tx,ty)x+h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t \\
= & \int_0^1 \{g(tx,ty)+\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)tx+\frac{\partial h}{\partial x}(tx,ty)ty\}\mathrm{d}t \\
= & \Big[g(tx,ty)t\Big]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\{\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)x+\frac{\partial g}{\partial y}(tx,ty)y\}t\mathrm{d}t+ \\
& \int_0^1\{\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)tx+\frac{\partial h}{\partial x}(tx,ty)ty\}\mathrm{d}t \\
= & g(x,y)
\end{aligned}
$$

問。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\displaystyle\int_0^1\{g(tx,ty)x+h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t=h(x,y)$ を示せ。

積分可能条件を満たしていることがわかる微分１形式と見て、常微分方程式が解ける場合がある。

例。$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-3x^2y}{x^3-2y}.$

これを全微分方程式の形にすると $(-3x^2y+2x)\mathrm{d}x+(2y-x^3)\mathrm{d}y=0$ で、これは平面全体で定義されている。積分可能条件 $\dfrac{\mathrm{d}(-3x^2y+2x)}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\mathrm{d}(2y-x^3)}{\mathrm{d}x}$ を満たすので、全微分 $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$ の形に書かれる。

$$
\begin{aligned}
f(x,y)= & \int_0^1\{(-3x^2yt^3+2xt)x+(2yt-x^3t^3)y\}\mathrm{d}t \\
= & -3x^3y\frac{1}{4}+2x^2\frac{1}{2}+2y^2\frac{1}{2}-x^3y\frac{1}{4} \\
= & y^2-x^3y+x^2
\end{aligned}
$$

従って、$y^2-x^3y+x^2=C$ すなわち、$y=\dfrac{1}{2}\{x^3\pm\sqrt{x^6-4(x^2-C)}\}$ が解である。

問　[YE] p.43 例題
問　[YE] p.48 問 2.5

積分可能条件を満たすとはかぎらない平面上の微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x+h(x,y)\mathrm{d}y$ に対しても、もしもある平面上の関数 $\lambda(x,y)$ に対して、$\lambda(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x+\lambda(x,y)h(x,y)\mathrm{d}y$ が完全形式ならば、すなわち、積分可能条件 $\dfrac{\partial(\lambda(x,y)g(x,y))}{\partial y}=\dfrac{\partial(\lambda(x,y)h(x,y))}{\partial x}$ を満たせば、関数 $f(x,y)$ で $\mathrm{d}f(x,y)=\lambda(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x+\lambda(x,y)h(x,y)\mathrm{d}y$ を満たすものが得られ、$f(x,y)=C$ が解となる。

このような $\lambda(x,y)$ を積分因子と呼ぶ。積分因子を求める問題は難しい。

問　[YE] p.47 例題
問　[YE] p.48 問 2.7

常微分方程式

常微分方程式は、x を変数、y を x の関数とするとき、x, y, $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\ldots$, $y^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ の間の関係式

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

あるいは

$$F(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}) = 0$$

で与えられる。(将来、y がベクトルに値を持つことも考える。)
n を常微分方程式の階数と呼ぶ。

常微分方程式の解

$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ を満たす x 関数 $y = f(x)$ を解と呼ぶ。
他に条件がない場合は通常、任意定数あるいは積分定数を n 個含む。その場合、一般解と呼ぶ。
x_0 における値 $f(x_0)$ が定まっている等の条件から、任意定数の値が定まると、1つの関数が定まるが、これを特殊解と呼ぶ。
一般解から、定数の値を定めるだけでは得られない解を持つこともあり、これを特異解と呼ぶ。

特異解の例 $y = 2x$ に接する放物線族。

$y = (x-(a-1))^2 + 2a - 1$ は、$y' = 2(x-(a-1))$ だから、$y = \dfrac{(y')^2}{4} + 2x - y' + 1$ を満たす。
$y - 2x = \dfrac{(y'-2)^2}{4}$ から $y - 2x = z$ とおくと $4z = (z')^2$. $z' = 2\sqrt{z}$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \int \mathrm{d}x$. $\sqrt{z} = x + C$, 従って、$y - 2x = (x+C)^2$. 積分定数を取り替えてもとの式を得る。一方、$y = 2x$ も解である。

参考　[YE] p.18-22.