変数係数線形常微分方程式

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ を考える。$\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} = 0$ のとき同次形というが、このとき解の空間は、n 次元ベクトル空間である。すなわち $t = t_0$ における初期値 $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ によって解は定まり、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = G(t)\begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ と書かれる。ただし $G(t_0) = I$ （単位行列）である。. ここで、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = A(t)G(t)$ となる。$G(t)$ の第 j 列は $\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ を初期値とする解である。

$\det G(t)$ を知ることは、解についていくつかの予測をする上で重要である。すなわち、$\det G(t)$ は t_0 における体積1のものが t においてどうなっているかを示す。もしも、$t \to \infty$ のときにすべての解が 0 に収束するならば、$\det G(t) \to 0$ となるはずである。

このとき、

定理 (リウビルの公式)。$\det G(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}$ **が成立する。**

言葉をかえて言うと、$\det G(t)$ は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det G(t) = \mathrm{tr}A(t)\det G(t)$, $\det G(t_0) = 1$ を満たす。すなわち、$\det G(t)$ は、常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{tr}A(t)x$, $\det x(t_0) = 1$ の解である。

実際 $G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$ であるとする ($g_i(t)$ は第 i 行) と、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = A(t)G(t)$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)g_j(t)$ ということである。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det G(t)\\
=\ &\det\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\cdots+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}t}(t)\end{pmatrix}\\
=\ &\det\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)g_j(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(t)g_j(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\cdots+\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)g_j(t)\end{pmatrix}\\
=\ &\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)\det\begin{pmatrix}g_j(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^n a_{2j}(t)\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_j(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}+\cdots+\sum_{j=1}^n a_{nj}(t)\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_j(t)\end{pmatrix}\\
=\ &\sum_{j=1}^n a_{jj}(t)\det\begin{pmatrix}g_1(t)\\ g_2(t)\\ \vdots\\ g_n(t)\end{pmatrix}=\mathrm{tr}A(t)\det G(t)
\end{aligned}$$

注意。$A(t)=A$, $G(t)=e^{tA}$ のとき、$\det e^{tA}=e^{t\ \mathrm{tr}A}$ となる。これはジョルダン標準形からも容易に示される。

言葉。

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}=A(t)\vec{y}$ の解 $\vec{y}_1(t)$, $\ldots$, $\vec{y}_n(t)$ が一次独立のとき、$\vec{y}_1(t)$, $\ldots$, $\vec{y}_n(t)$ を一組の基本解あるいは解の基本系と呼ぶ。

基本解を並べた行列 $G(t)$ を基本解行列と呼ぶ。$G(0)=I$ となるとは限らない。

２つの基本解行列 $G_1(t)$, $G_2(t)$ に対し、$B=G_1(t_0)^{-1}G_2(t_0)$ とおくと、$G_2(t)=G_1(t)B$.

注意。基本解行列 $G(t)$ に対し、$\det G(t)$ は $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{tr}A(t)x$ を満たし、$\det G(t)=e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}\det G(0)$ となるから、$\det G(t)$ の変化の割合 $e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s}$ は、基本解行列 $G(t)$ のとり方によらない。

随伴線形微分方程式. 基本解行列 $G(t)$ は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)=A(t)G(t)$ を満たす。ここで、逆行列を考える。$G(t)^{-1}=H(t)$ とすると $I=G(t)H(t)$ を微分して、

$$\begin{aligned}
0=\ &(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t))H(t)+G(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))\\
=\ &A(t)G(t)H(t)+G(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))\\
=\ &A(t)+G(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t))
\end{aligned}$$

従って $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)=-H(t)A(t)$. 転置行列をとれば $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}^tH(t)=-{}^tA(t)\,{}^tH(t)$.

すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} = -{}^tA(t)\vec{z}$ の基本解行列の１つは ${}^tG(t)^{-1}$ で与えられる。

この微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} = -{}^tA(t)\vec{z}$ は $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y}$ に**随伴する**線形微分方程式と呼ばれる。

線形微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y}$ と、それに随伴する線形微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z} = -{}^tA(t)\vec{z}$ の解、$\vec{y}(t)$, $\vec{z}(t)$ に対して、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{z}(t)\bullet\vec{y}(t)) = (-{}^tA(t)\vec{z}(t))\bullet\vec{y}(t) + \vec{z}(t)\bullet(A(t)\vec{y}(t)) = 0$$

となる。従って、$\vec{z}(t)\bullet\vec{y}(t)$ の値は一定である。

特に、$A(t)$ が交代行列 (${}^tA(t) = -A(t)$) であれば、$\|\vec{y}(t)\|$ は定数となり、$G(0) = I$ となる基本解行列 $G(t)$ は直交行列となる。実際、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}^tG(t)G(t)) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}{}^tG(t))G(t) + {}^tG(t)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)) \\ &= {}^tG(t)\,{}^tA(t)G(t) + {}^tG(t)A(t)G(t) = 0\end{aligned}$$

で、${}^tG(0)G(0) = I$ だから、${}^tG(t)G(t) = I.$

「随伴する」という考え方は、$L = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A(t) : \mathrm{Map}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^\mathrm{n}) \longrightarrow \mathrm{Map}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^\mathrm{n})$ と内積 $\langle\vec{f}, \vec{g}\rangle = \displaystyle\int_a^b \vec{f}(t)\bullet\vec{g}(t)\mathrm{d}t$ について $\langle L^*\vec{f}, \vec{g}\rangle = \langle\vec{f}, L\vec{g}\rangle$ すなわち、普通の行列だったら、（共役）転置行列となるものを考えるということである。随伴するものと等しければ、対称行列と同様の良い性質を持つことが期待でき、随伴するものと合わせて 0 になれば、反対称行列と同様の良い性質を持つことが期待できる。

$$\begin{aligned}&\langle\vec{f}, L\vec{g}\rangle \\ =\ & \int_a^b(\vec{f}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t} - \vec{f}\bullet(A(t)\vec{g}))\mathrm{d}t \\ =\ & \left[\vec{f}\bullet\vec{g}\right]_a^b - \int_a^b(\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\bullet\vec{g} + ({}^tA(t)\vec{f})\bullet\vec{g})\mathrm{d}t \\ =\ & \langle L^*\vec{f}, \vec{g}\rangle\end{aligned}$$

だから、a, b で $\vec{0}$ になる関数を扱っていれば、$L^* = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - {}^tA(t)$ となる。

ここで、$a,\ b$ で $\vec{0}$ とならない場合についても $L^* = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - {}^tA(t)$ として書いた $\langle\vec{f}, L\vec{g}\rangle - \langle L^*\vec{f}, \vec{g}\rangle = \left[\vec{f}\bullet\vec{g}\right]_a^b$, すなわち

$$\vec{f}(b)\bullet\vec{g}(b) - \vec{f}(a)\bullet\vec{g}(a) = \int_a^b\{\vec{f}(t)\bullet(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{g}(t) - A(t)\vec{g}(t)) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{f}(t) + {}^tA(t)\vec{f})\bullet\vec{g}(t)\}\mathrm{d}t$$

を**グリーンの公式**と呼ぶ。

非同次の場合。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ に対して、定数変化法を試みることが出来る。基本解行列 $G(t)$ について、$\vec{y}(t) = G(t)\vec{z}(t)$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(G(t)\vec{z}(t)) = A(t)G(t)\vec{z}(t) + G(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}(t) = A(t)G(t)\vec{z}(t) + \vec{b}(t)$$

を得る。

従って $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{z}(t) = G(t)^{-1}\vec{b}(t)$ となるように $\vec{z}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} G(s)^{-1}\vec{b}(s)\mathrm{d}s$ とすればよい。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \vec{b}_i(t)$ の解 $\vec{y}_i(t)$ が見つかっているとき、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y} = A(t)\vec{y} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} c_i\vec{b}_i(t)$ の解は $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} c_i\vec{y}_i(t)$ で与えられる。（重ね合わせの原理）

周期的な係数を持つ線形常微分方程式。

変数係数線形常微分方程式で最も面白いのものは $A(t)$ が周期的であるときである。$A(t+T) = A(t)$. このとき、$G(t+T) = G(t)B$ となる。$G(t+NT) = G(t)B^N$ だから、B を求めることが出来れば、解の様子はかなり良くわかる。B はフロケ Floquet の行列と呼ばれる。