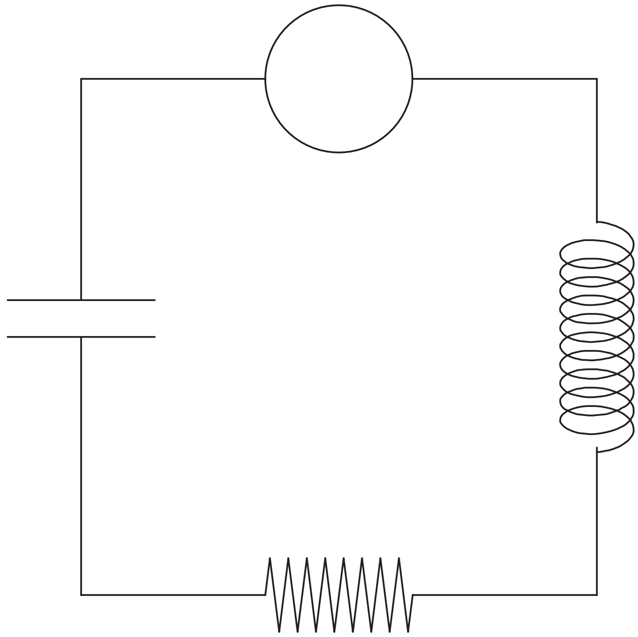
9. 6月29日

古典的電気回路



キャパシター（capacitor コンデンサー）、コイル (inductor)、回路の抵抗 (resistor)、からなる電気回路を考える。

- 抵抗は、$E = RI$ を満たす。R は抵抗 (レジスタンス) と呼ばれる。
- 電流 I に対して、キャパシターは、両端の電位差 E が, 電荷 (チャージ)Q に比例し、$Q = CE,\ I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ を満たす。従って、$I = C\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ を満たす。C はキャパシタンスと呼ばれる。
- 電流 I に対して、コイルは、両端の電位差 E が, $L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = E$ を満たす。L はインダクタンスと呼ばれる。

円の部分には外部電圧 $E_0 \cos \omega t$ を交流でかける予定である。

キルヒホッフの法則（電流は同じ量であることを参考にして）流れる電流 I は、キャパシター（コンデンサー）、コイル、回路の抵抗について等しい。

円の両端の電位差 E は $E = E_C + E_R + E_L$ である。これについて、

$C\dfrac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} = I,\ L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = E_L,\ E_R = RI$

回路には時計回りに向きが付いているとして

$$E = E_C + E_R + E_L = E_C + RC\frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 E_C}{\mathrm{d}t^2}$$

交流の電位を与えると、$x = E_c$ の微分方程式として、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}x = \frac{E_0}{LC}\cos \omega t$$

を得る。

特性方程式は、$\lambda^2 + \dfrac{R}{L}\lambda + \dfrac{1}{LC} = 0.$ 特性解（特性方程式の解）は

$$\frac{1}{2}(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}) = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

特性解（特性方程式の解）は、固有値は２つの負の実数 α_1, α_2 であるか、固有値が１つの負の実数 α となるか、実部が負の共役複素数 $\mu \pm \nu i$ である。

従って、同次方程式の解 $x(t)$ は、$a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t}$, または、$a_1 e^{\alpha t} + a_2 t e^{\alpha t}$, または、$e^{\mu t}(a_1 \cos \nu t + a_2 \sin \nu t)$ の形となる。

従って $t \longrightarrow \infty$ のとき、急速に $x(t) \longrightarrow 0$ となる。

非同次方程式の解を１つ見つけると、すべての解はこの解に近づく。

以前に求めた式で考えると、非同次方程式の解の１つは、２つの特性解をもつときは、次で求められる。

$$
\begin{aligned}
x(t) = & -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2}\int_0^t (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-t\alpha_1}\mathrm{d}t + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2}\int_0^t (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-t\alpha_2}\mathrm{d}t \\
= & -\frac{e^{t\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2}\left[\frac{e^{t(i\omega - \alpha_1)}}{i\omega - \alpha_1} + \frac{e^{t(-i\omega - \alpha_1)}}{-i\omega - \alpha_1}\right]_0^t + \frac{e^{t\alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}\frac{E_0}{2}\left[\frac{e^{t(i\omega - \alpha_2)}}{i\omega - \alpha_2} + \frac{e^{t(-i\omega - \alpha_2)}}{-i\omega - \alpha_2}\right]_0^t
\end{aligned}
$$

この式の０での値に関係する部分は、同次方程式の解だから、非同次方程式の解の１つは、２つの特性解をもつときは、

$$
\begin{aligned}
& \frac{E_0}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}\{-\frac{e^{ti\omega}}{i\omega - \alpha_1} - \frac{e^{-ti\omega}}{-i\omega - \alpha_1} + \frac{e^{ti\omega}}{i\omega - \alpha_2} + \frac{e^{-ti\omega}}{-i\omega - \alpha_2}\} \\
= & \frac{E_0}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}\{(-\frac{1}{i\omega - \alpha_1} + \frac{1}{i\omega - \alpha_2})e^{ti\omega} + (-\frac{1}{-i\omega - \alpha_1} + \frac{1}{-i\omega - \alpha_2})e^{-ti\omega}\} \\
= & \frac{E_0}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}\{\frac{-i\omega + \alpha_2 + i\omega - \alpha_1}{(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2)}e^{ti\omega} + \frac{i\omega + \alpha_2 - i\omega - \alpha_1}{(-i\omega - \alpha_1)(-i\omega - \alpha_2)}e^{-ti\omega}\} \\
= & \frac{E_0}{2}\{\frac{e^{ti\omega}}{(i\omega - \alpha_1)(i\omega - \alpha_2)} + \frac{e^{-ti\omega}}{(-i\omega - \alpha_1)(-i\omega - \alpha_2)}\} \\
= & \frac{E_0}{2}\{\frac{e^{ti\omega}}{-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} + \frac{e^{-ti\omega}}{-\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}}\}
\end{aligned}
$$

電流を求めると、

$$
\begin{aligned}
I = & C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{CE_0}{2}\{\frac{i\omega e^{ti\omega}}{-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}} + \frac{-i\omega e^{-ti\omega}}{-\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}}\} \\
= & \frac{LC^2\omega E_0}{2}\{\frac{ie^{ti\omega}}{-LC\omega^2 + iRC\omega + 1} + \frac{-ie^{-ti\omega}}{-LC\omega^2 - iRC\omega + 1}\} \\
= & \frac{LC^2\omega E_0}{2}\{\frac{(RC\omega - (LC\omega^2 - 1)i)e^{ti\omega}}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2} + \frac{(RC\omega + (LC\omega^2 - 1)i)e^{-ti\omega}}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2}\}
\end{aligned}
$$

振幅は $\dfrac{LC^2\omega E_0}{\sqrt{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2}}$、位相のずれ ϕ について、$\tan\phi = -\dfrac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}$.

抵抗が $R = 0$ ならば、同次方程式の解は、$\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t$ の線形結合になる。ここで $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ である。$(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2 = L^2C^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2C^2\omega^2$ となるから、振幅は $\dfrac{CE_0}{\sqrt{\dfrac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}{\omega^2} + \dfrac{R^2}{L^2}}}$ ω が ω_0 に近づくときには、電流の振幅の最大値 $\dfrac{CE_0 L}{R}$ に近づく。

このような場合、重要なことは、非同次方程式の解をひとつ求めることであることになる。

演算子法または記号法

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ を D と書くと、D は微分可能な関数に対してその導関数を対応させる写像である。

$$D : C^\infty \longrightarrow C^\infty$$

ここで、C^∞ は無限回微分できる関数の集合である。

$(D-a)x = Dx - ax$ とする。このように関数に関数を対応させる写像を演算子 (operator) と呼ぶ。

e^{at} は $(D-a)x = 0$ の解である。実際、$(D-a)e^{at} = 0$ である。さらに、

$$((D-a)e^{at})f(t) = D(e^{at})f(t) + e^{at}D(f(t)) - ae^{at}f(t) = (e^{at}D)f(t)$$

がすべての写像 $f(t)$ に対して成立するから、演算子として

$$(D-a)e^{at} = e^{at}D$$

となる。演算子の計算は行列の計算のように順序が重要である。右端から順に関数に作用するというように考える。

$(D-a)x = b(t)$ の解き方を次のように考える。

$$(D-a)(e^{at}e^{-at}x) = e^{at}D(e^{-at}x) = b(t)$$

D^{-1} を不定積分を１つ取る写像とする。例えば、$D^{-1}f(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ としてもよい。実際は $D^{-1}e^{at} = \dfrac{e^{at}}{a}$ と考える方が容易である。

そうすると、$(D-a)(e^{at}e^{-at}x) = e^{at}D(e^{-at}x) = b(t)$ だから、

$$\begin{aligned} e^{-at}x = &\quad D^{-1}(e^{-at}b(t)), \\ x = &\quad e^{at}D^{-1}(e^{-at}b(t)) \end{aligned}$$

と計算される。

$$(D-a)^{-1} = e^{at}D^{-1}e^{-at}$$

と考えてよい。

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = b(t)$ となる x を求める問題は、x に対して、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = D^2x + a_1Dx + a_2x$$

を対応させる写像の $b(t)$ の逆像の点を１つ求めることである。

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)$ のとき、

$$\begin{aligned} (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)x = &\quad (D-\alpha_1)(Dx-\alpha_2x) \\ = &\quad D^2x - \alpha_2Dx - \alpha_1Dx + \alpha_1\alpha_2x \\ = &\quad D^2x + a_1Dx + a_2x \end{aligned}$$

となる。

$(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)x = b(t)$ の解は、

$$\begin{aligned} (D-\alpha_2)x = &\quad (D-\alpha_1)^{-1}b(t) = e^{\alpha_1t}D^{-1}(e^{-\alpha_1t}b(t)), \\ x = &\quad (D-\alpha_2)^{-1}e^{\alpha_1t}D^{-1}(e^{-\alpha_1t}b(t)) \\ = &\quad e^{\alpha_2t}D^{-1}(e^{-\alpha_2t}e^{\alpha_1t}D^{-1}(e^{-\alpha_1t}b(t))) \end{aligned}$$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \alpha)^2$ のとき、$(D-\alpha)^2 x = b(t)$ の解は、

$$\begin{aligned} (D-\alpha)x = &\ (D-\alpha)^{-1}b(t) \\ = &\ e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t)), \\ x = &\ (D-\alpha)^{-1}e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t)) \\ = &\ e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}e^{\alpha t}D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t))) \\ = &\ e^{\alpha t}D^{-1}(D^{-1}(e^{-\alpha t}b(t))) \end{aligned}$$

これらの計算は、定数変化法を行っているのと同じであるが、計算の表記や見通しの上では簡明である。

とくに、$b(t)$ が外部からの入力である場合、周期的な入力であることが多い。

周期 2π のとき、フーリエ展開されている

$$b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

と考える。それぞれの成分についての計算は、かなり機械的に出来ることが納得できるであろう。$D^{-1}e^{at} = \dfrac{e^{at}}{a}$ と考えてよいことに注意する。

例。 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 2\cos t$ の解を１つ求めよ。

$D^2+2D+2 = (D+1+i)(D+1-i)$ であるから、$(D+1+i)(D+1-i)x = e^{it}+e^{-it}$ は次のように解かれる。

$$\begin{aligned} (D+1-i)x = &\ (D+1+i)^{-1}(e^{it}+e^{-it}) \\ = &\ e^{-(1+i)t}D^{-1}e^{(1+i)t}(e^{it}+e^{-it}) \\ = &\ e^{-(1+i)t}D^{-1}(e^{(1+2i)t}+e^{t}) \\ = &\ e^{-(1+i)t}(\frac{e^{(1+2i)t}}{1+2i}+e^{t}) \\ = &\ (\frac{e^{it}}{1+2i}+e^{-it}), \\ x = &\ (D+1-i)^{-1}(\frac{e^{it}}{1+2i}+e^{-it}) \\ = &\ e^{-(1-i)t}D^{-1}e^{(1-i)t}(\frac{e^{it}}{1+2i}+e^{-it}) \\ = &\ e^{-(1-i)t}D^{-1}(\frac{e^{t}}{1+2i}+e^{(1-2i)t}) \\ = &\ e^{-(1-i)t}(\frac{e^{t}}{1+2i}+\frac{e^{(1-2i)t}}{1-2i}) \\ = &\ \frac{e^{it}}{1+2i}+\frac{e^{-it}}{1-2i} \\ = &\ \frac{(1-2i)e^{it}}{5}+\frac{(1+2i)e^{-it}}{5} \\ = &\ \frac{2}{5}\cos t+\frac{4}{5}\sin t \end{aligned}$$

注意。この計算は、D^{-1} を定数を無視して取っているので計算が簡単になっている。D^{-1} を一通りに定めていないことに注意が必要である。