

### 曲線族と微分方程式の例

$(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  への距離の比が一定の曲線。

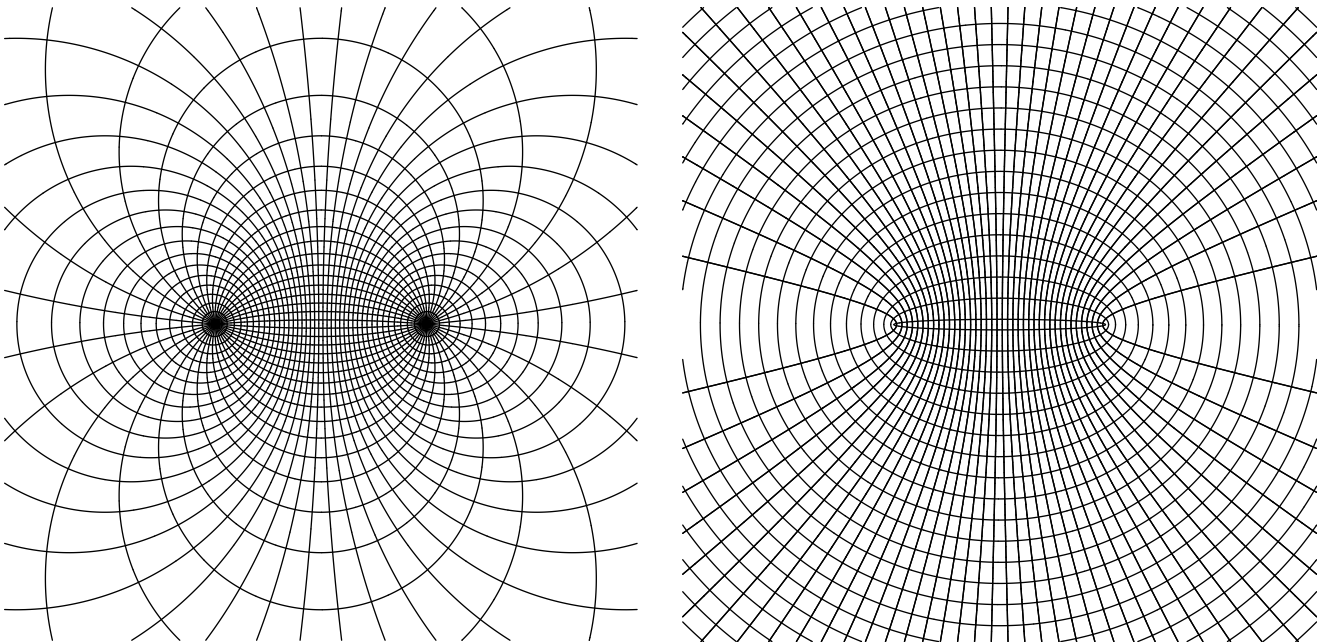
$(x-1)^2 + y^2 = C((x+1)^2 + y^2)$ .  $x-1 + yy' = C(x+1 + yy')$  だから、  
微分方程式  $(x+1 + yy')((x-1)^2 + y^2) = (x-1 + yy')((x+1)^2 + y^2)$ .

$(x^2 - 1)(-2) + 2y^2 = yy'(4x)$  すなわち  $y' = \frac{-x^2 + y^2 + 1}{2xy}$  の解である。

$(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  を通る円。

$x^2 + (y-c)^2 = c^2 + 1$ . すなわち、 $x^2 + y^2 - 2cy = 1$ .  $2x + 2yy' - 2cy' = 0$  だから、微分方程式  
 $(x^2 + y^2 - 1)y' = 2xy + 2y^2y'$  すなわち  $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1}$  の解である。

これらの曲線族は直交している。



### 共焦点楕円族、双曲線族

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = C$$

$$\frac{x-1 + yy'}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \pm \frac{x+1 + yy'}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = 0$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2}(x-1 + yy') \pm \sqrt{(x-1)^2 + y^2}(x+1 + yy') = 0$$

$$(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-1)^2 + y^2})yy' + (x-1)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \pm (x+1)\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

このとき、

$$\frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + (x+1)\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2})} - \frac{(x-1)\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - (x+1)\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{y(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2})} = -1$$

$$\text{分子 } (x-1)^2((x+1)^2 + y^2) - (x+1)^2((x-1)^2 + y^2) = -4xy^2$$

$$\text{分母 } y^2(((x+1)^2 + y^2) - ((x-1)^2 + y^2)) = 4xy^2$$

直交している。

平面上の微分方程式  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  で与えられる曲線族に直交する曲線族は  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$  あるいは、 $\frac{dx}{dy} = -f(x, y)$  であたえられる。

問 [YE] p.10 問 1.5, 1.6.

連立微分方程式

原点を中心とする同心円を  $(r \cos t, r \sin t)$  のように表示すると、

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t = -y, \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t = x \text{ を満たすから、同心円は、連立微分方程式 } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \text{ を満たしている。}$$

例。Lotka-Volterra 方程式 
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (a_1 + b_1 u + c_1 v)u \\ \frac{dv}{dt} = (a_2 + b_2 u + c_2 v)v \end{cases}$$

これは、平面上の点  $(u, v)$  の変化を表していると考えるのが良い。

ベクトル場

一般には、
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$
 これは、平面上のベクトル場を与えている。

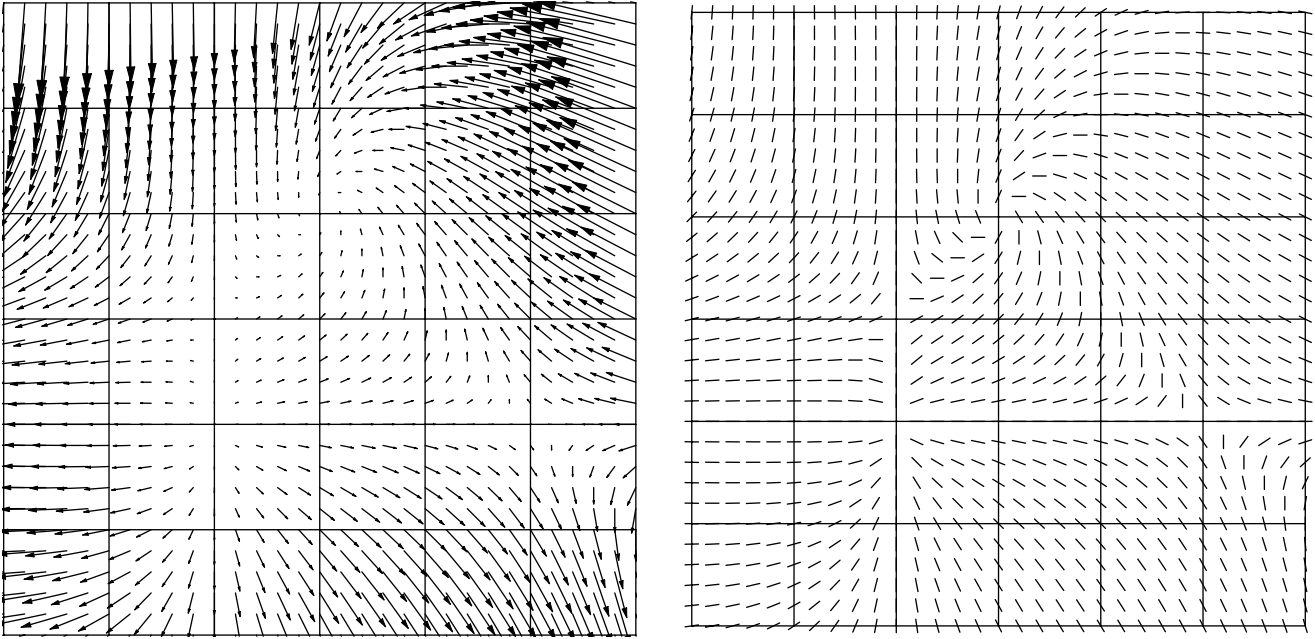
曲線  $(a(t), b(t))$  は、
$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = f(a(t), b(t)) \\ \frac{db}{dt} = g(a(t), b(t)) \end{cases}$$
 を満たすときに、この微分方程式の解である。

時間の進み方を  $k$  倍にした曲線  $(a(kt), b(kt))$  は、
$$\begin{cases} \frac{da(kt)}{dt} = k f(a(kt), b(kt)) \\ \frac{db(kt)}{dt} = k g(a(kt), b(kt)) \end{cases}$$
 を満たすから、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = k g(x, y) \end{cases} \text{ の解である。}$$

解曲線を軌道と呼ぶこともある。ベクトル場をスカラー倍しても、軌道の形は変わらない。平面上のベクトル場を書き表すと、おおよその軌道の様子が見てとれることが多い。

ロトカ・ボルテラ方程式 
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (3 - u - v)u \\ \frac{dv}{dt} = (1 + u - v)v \end{cases}$$
 について書いてみよう。



左の図は、各点にベクトルを（縮小して）描いたもの。右の図は、各点のベクトルの向きを小線分で表したものである。ひとつの小正方形の1辺の長さは1で、

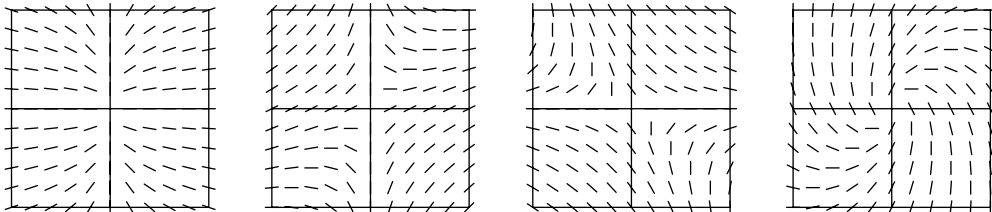
$$[-2, 4] \times [-2, 4] = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 4, -2 \leq y \leq 4\}$$

の範囲を描いたものである。直線  $u = 0$ ,  $v = -u + 3$ ,  $v = 0$ ,  $v = u + 1$  を書き込むと良い。

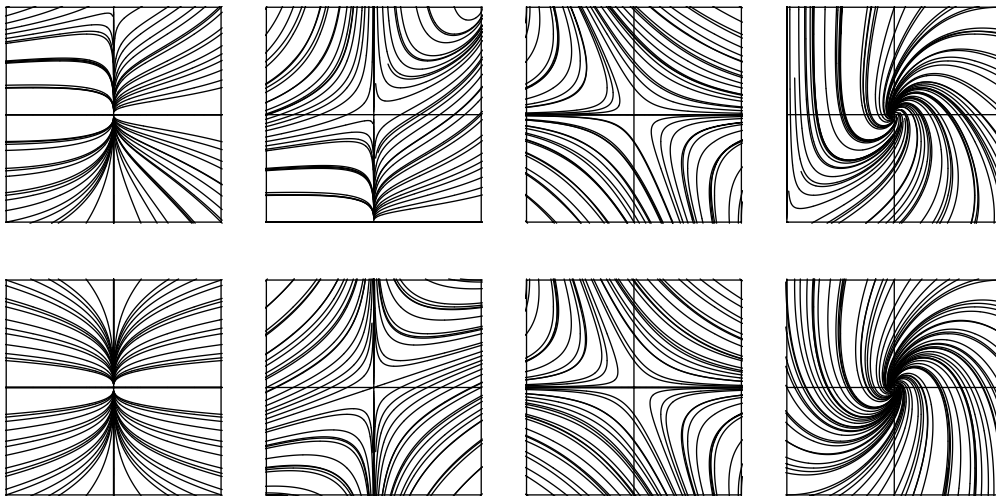
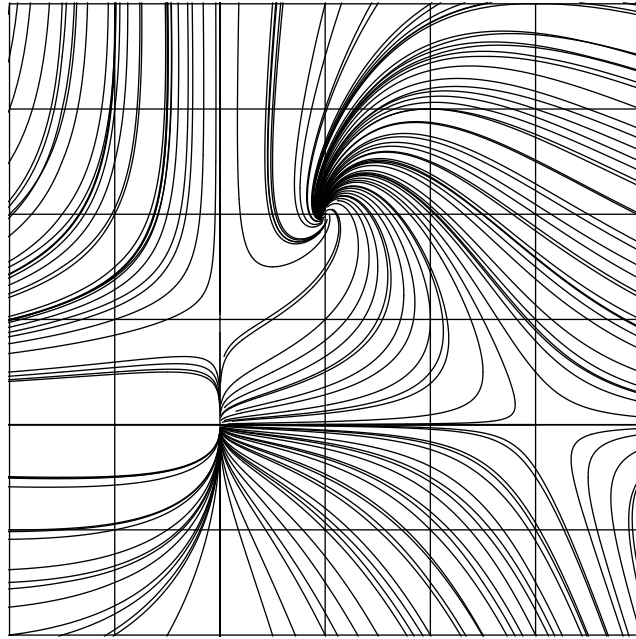
$$\frac{du}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0 \text{ となる点は、 } (0, 0), (0, 1), (3, 0), (1, 2).$$

それぞれの点  $(a, b)$  で、  $u = a + \hat{u}$ ,  $v = b + \hat{v}$  として、

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = 3\hat{u} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = \hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = 2\hat{u} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = \hat{u} - \hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = -3\hat{u} - 3\hat{v} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = 4\hat{v} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = -\hat{u} - \hat{v} \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = 2\hat{u} - 2\hat{v} \end{cases}$$



これらの線形のベクトル場の方向を表した4つの図ともとのベクトル場が0となる4点の近くの様子を比較すると良い。



それぞれの解曲線の様子を図示したものである。中の4つの図は、Lotka-VorTerra ベクトル場の零点の周り、下の4つの図は、線形方程式の様子である。

図の書き方は、十分の小さな時間間隔についての「折れ線近似」である。

実際の解を、知られている関数で書き表すことは、滅多に出来ない。

しかし、「解は存在する。また、1つの微分方程式を近似している微分方程式の解は、もとの微分方程式の解に近い。」と思われる。

これを定式化するのが、常微分方程式の解の存在と一意性の定理である。