11. 7月１３日

変数係数高階線形常微分方程式

$\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n(t)x = b(t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

と同値である。

同次方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n(t)x = 0$ の解の空間は、n 次元ベクトル空間となる。

基底として n 個の関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ をとるとき、これを１組の基本解、解の基本系とよぶ。１階化した方程式の基本解行列に当たるものは、次のものである。

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}^2x_n}{\mathrm{d}t^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_2}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_n}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{pmatrix}$$

これは、ロンスキー行列 Wronskian matrix と呼ばれる。この行列の行列式をロンスキアン（ロンスキー行列式）と呼び、$W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と書く。

解 $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ が解の基本系をなすことと、$W(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ は同値である。

$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\mathrm{d}s}$ だから、$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$ ならば、常に $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \neq 0$ である。特に、$a_1(t) = 0$ ならば、ロンスキー行列式は定数である。$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\mathrm{d}s}$ はリウビル Liouville の公式と呼ばれる。

非同次方程式に対し定数変化法で解をもとめるときにもロンスキー行列式が現れる。

$\sum x_k(t)\xi_k(t)$ の形すなわち $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_2}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \dots & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_n}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ の形で、解を求めると、

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_2}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_n}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

だから、クラメルの公式によって

$$\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 & \cdots & x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-2}x_1}{\mathrm{d}t^{n-2}} & \cdots & 0 & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}^{n-2}x_n}{\mathrm{d}t^{n-2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \cdots & b(t) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_n}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} & \dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}^2x_n}{\mathrm{d}t^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_2}{\mathrm{d}t^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_n}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{pmatrix}}.$$

この式の分母はロンスキアン、分子はロンスキアンの余因子に $b(t)$ をかけたものである。

また、n 個の解 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ に対し、$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ とすると、これらは１次従属である。すなわち $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) = 0$ となるすべてが 0 ではない実数 c_i が存在する。

n 個の関数 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ に対し、$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ となるとき、$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ には関数関係があるという。

実際、例えば $W(x_1, x_2) = 0$ ならば $x_1\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - x_2\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 0$ あるいは、$\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \dfrac{x_2}{x_1}$ という関係があり、この微分方程式を解けば、x_2 は x_1 の関数として表される。

線形常微分方程式を作用素と見る場合、

$Lx(t) = (a_0(t)\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + a_1(t)\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_n(t))x(t)$ と $\langle x(t), y(t)\rangle = \displaystyle\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t$ に対し、随伴する作用素 L^* $(\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^*y\rangle)$ を考えることが出来る。

例えば、２階の線形常微分方程式に対しては、

$\langle Lx, y\rangle = \int_a^b a_0 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} y + a_1(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} y + a_2(t)x(t)y(t)\mathrm{d}t$. 第１項は

$$\begin{aligned} & \left[a_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} y\right]_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_0(t)y(t))\mathrm{d}t \\ = \quad & \left[a_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} y\right]_a^b - \left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_0 y)\right]_a^b + \int_a^b x(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(a_0(t)y(t))\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

第２項は $\left[a_1 xy\right]_a^b - \int_a^b x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1(t)y(t))\mathrm{d}t$ だから、a, b で値も微分も 0 になるような関数を考えれば、$L^* y = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(a_0(t)y(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_1(t)y(t)) + a_2(t)y(t)$ となる。

２階の線形常微分方程式を、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) + q(t)x = 0$ の形に書き換えることがしばしば行われる [Y-E]。(Sturm-Liouville).

$Lx = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) + q(t)x$ に対し、

$$\begin{aligned} & \langle Lx, y\rangle \\ = \quad & \int_a^b (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) + q(t)x)y\mathrm{d}t \\ = \quad & \left[p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} y\right]_a^b - \int_a^b ((p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y\mathrm{d}t + \int_a^b q(t)xy\mathrm{d}t \\ = \quad & \left[p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} y\right]_a^b - \left[p(t)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]_a^b + \int_a^b x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y)\mathrm{d}t + \int_a^b q(t)xy\mathrm{d}t \end{aligned}$$

だから、$\left[\dots\right]_a^b$ が 0 となるような x, y に対して $L^* y = Lx$ となる。自己随伴 self-adjoint と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \left[p(t)(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} y - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\right]_a^b = \quad & \langle Lx, y\rangle - \langle x, Ly\rangle \\ = \quad & \int_a^b (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) + q(t)x)y\mathrm{d}t - \int_a^b (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) + q(t)y)x\mathrm{d}t \\ = \quad & \int_a^b (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})x)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

となる。グリーンの公式と呼ばれる。