論文内容の要旨

修士論文題目:

Ind-$\mathscr{D}$-加群について
—連接性と増大度付き Cauchy-Kovalevskaya-柏原の定理—

氏名：伊藤　要平

本論文では線型微分作用素の成す層 $\mathscr{D}$ が作用する帰納層 (以下, Ind-$\mathscr{D}$-加群と呼ぶ) について考察する. 特に次のような問題に取り組み, 主な結果として定理 3.3.1 と定理 5.19 を得た.

問題. X を複素多様体とする.

(1) Ind-$\mathscr{D}_X$-加群に対して連接性をどのように考えるか. また, 連接な Ind-$\mathscr{D}_X$-加群はどのような振る舞いをするか.

(2) Ind-$\mathscr{D}_X$-加群に対する演算 (テンソル積, 逆像, 順像など) をどう考えるか. そして, それら演算同士の可換性について.

以下, この問題に対する本論文での主な研究結果を述べていく.

問題 (1). 一般の場合に連接性を次のように置く事にする.

定義 1. (定義 3.3.2) X を第 2 可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $\Bbbk$ を体, A を Ind-$\Bbbk_X$-代数, M を Ind-A-加群とする. M が A 上連接であるとは, M は A 上局所有限生成であり任意の開集合 U と任意の局所有限生成な部分 Ind-$A|_U$-加群 N が $A|_U$ 上局所有限表示となる事とおいた.

この定義のもと次の圏同値が得られた.

定理 2. (定理 3.3.1) X を第 2 可算公理を満たす局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $\Bbbk$ を体, $\mathscr{A}$ を $\Bbbk$-代数の層とする. この時, 圏同値

$$\mathbb{M}\mathrm{od}_{coh}(\mathscr{A}) \simeq \mathrm{I}_{coh}(\mathscr{A})$$

が存在する. ここで, $\mathbb{M}\mathrm{od}_{coh}(\mathscr{A})$ は連接 $\mathscr{A}$-加群の成す圏, $\mathrm{I}_{coh}(\mathscr{A})$ は連接 Ind-$\mathscr{A}$-加群の成す圏である.

特に, X を複素多様体とし $\Bbbk = \mathbb{C}$, $\mathscr{A} = \mathscr{D}_X$ とする事により圏同値

$$\mathbb{M}\mathrm{od}_{coh}(\mathscr{D}_X) \simeq \mathrm{I}_{coh}(\mathscr{D}_X)$$

が得られる.

問題 (2)**.** 5章で述べるように Ind-$\mathscr{D}$-加群に対するテンソル積や逆像, 順像などの演算を考え, 随伴公式や射影公式など 4.1 節で紹介する $\mathscr{D}$-加群に関する事実に類似した結果が Ind-$\mathscr{D}$-加群に対しても成立する事がわかった. 特に Cauchy-Kovalevskaya-柏原の定理 (定理 4.1.21) の一般化である次の定理を証明した.

定理 3 (定理 5.19)**.** X と Y を複素多様体とし, 写像 $f : Y \to X$ を複素多様体の射とする.
$M \in \mathrm{I}_{coh}(\mathscr{D}_X)$ が写像 $f : Y \to X$ に対して非特性的であるならば帰納層の複体の射

$$f^{-1}R\mathcal{I}hom_{\beta_X \mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X^{\lambda}) \longrightarrow R\mathcal{I}hom_{\beta_Y \mathscr{D}_Y}(\mathbb{D}f^{-1}(M), \mathscr{O}_Y^{\lambda})$$

は擬同型である. ここで $\lambda = t, \mathrm{w}, \omega$ であり, β_X は定理 2(定理 3.3.1) の圏同値を与えている関手 $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathscr{D}_X) \to \mathrm{I}(\mathscr{D}_X)$ であり, $\mathbb{D}f^{-1}(M)$ は Ind-$\mathscr{D}_X$-加群 M の写像 f による逆像を表す. また, $\mathscr{O}_X^t$ は緩増加正則関数の成す帰納層であり, $\mathscr{O}_X^{\mathrm{w}}$ は $\mathcal{C}^{\infty}$-Whitney 関数の成す帰納層であり, $\mathscr{O}_X^{\omega} := \beta_X \mathscr{O}_X$ である. $\mathscr{O}_X$ は正則関数の成す層である.

Cauchy-Kovalevskaya-柏原の定理 (定理 4.1.21) とは次の定理でる.

定理 4 (定理 4.1.21)**.** X と Y を複素多様体とし, 写像 $f : Y \to X$ を複素多様体の射とする.
$\mathscr{M} \in \mathbb{M}\mathrm{od}_{coh}(\mathscr{D}_X)$ が写像 $f : Y \to X$ に対して非特性的であるならば複体の射

$$f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathbb{D}f^{-1}(\mathscr{M}), \mathscr{O}_Y)$$

は擬同型である. ここで $\mathbb{D}f^{-1}(\mathscr{M})$ は $\mathscr{D}_X$-加群 $\mathscr{M}$ の f による逆像を表し, $\mathscr{O}_X$ は正則関数の成す層である.

定理 3.3.1 の圏同値を与えている関手 $\alpha_X : \mathrm{I}(\mathscr{D}_X) \to \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathscr{D}_X)$ を帰納層の複体の擬同型

$$f^{-1}R\mathcal{I}hom_{\beta_X \mathscr{D}_X}(M, \mathscr{O}_X^{\lambda}) \longrightarrow R\mathcal{I}hom_{\beta_Y \mathscr{D}_Y}(\mathbb{D}f^{-1}(M), \mathscr{O}_Y^{\lambda})$$

に施すと層の複体の擬同型

$$f^{-1}R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\alpha_X M, \mathscr{O}_X) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathbb{D}f^{-1}(\alpha_X M), \mathscr{O}_Y)$$

が得られるので, 定理 3 を用いて定理 4 の別証明を与える事ができる.

更に, 定理 3 を用いれば Luca Prelli 氏によって示された増大度付き Cauchy-Kovalevskaya-柏原の定理と呼ばれる次の定理の別証明を与える事ができる.

定理 5 (定理 C)**.** X と Y を複素多様体とし, 写像 $f : Y \to X$ を複素多様体の射とする.
$\mathscr{M} \in \mathbb{M}\mathrm{od}_{coh}(\mathscr{D}_X)$ が射 $f : Y \to X$ に対して非特性的である場合に副解析層の複体の射

$$f^{-1}R\mathscr{H}om_{\rho_! \mathscr{D}_X}(\rho_! \mathscr{M}, \lambda_X \mathscr{O}_X^{\lambda}) \longrightarrow R\mathscr{H}om_{\rho_! \mathscr{D}_Y}(\rho_! \mathbb{D}f^{-1}(\mathscr{M}), \lambda_Y \mathscr{O}_Y^{\lambda})$$

は擬同型である. ここで $\lambda = t, \mathrm{w}, \omega, \varnothing$ である. 記号などは本論文 6 章を参照されたい.

以上が本論文の要旨である.