２００８年冬学期
数学II　演習問題 (文系）第8回　の略解

担当：　小林俊行教授　　ＴＡ：春田　力

問 1. (1) $n = 1$ の場合は明らか

(2), (3) $n = 2, 3$ の場合も多少複雑な計算で直接求めることも出来ますが、次のような方法もあります。

(2) $n = 2$ のとき

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a'} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b'} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$ とおく。

ここで、行列を列ベクトルを並べた形で ($B = (\overrightarrow{a'}\ \overrightarrow{b'})$ のように) 書くことにする。このとき、以下の (i), (ii), (iii) が成り立つことに注意する。

(i) 任意の２次元ベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{b_1}$ に対し

$$\det(\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{b_1}) = -\det(\overrightarrow{b_1}\ \overrightarrow{a_1})$$

(ii) 任意の２次元ベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{b_2}$ に対し

$$\det(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}\ \ \overrightarrow{b_1}) = \det(\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{b_1}) + \det(\overrightarrow{a_2}\ \overrightarrow{b_1})$$
$$\det(\overrightarrow{a_1}\ \ \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}) = \det(\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{b_1}) + \det(\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{b_2})$$

(iii) 任意の実数 c に対し

$$\det(c\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{b_1}) = \det(\overrightarrow{a_1}\ c\overrightarrow{b_1}) = c\det(\overrightarrow{a_1}\ \overrightarrow{b_1})$$

ここで、AB=$(A\overrightarrow{a'}\ A\overrightarrow{b'})$ =$(a'_1\overrightarrow{a} + a'_2\overrightarrow{b}\ \ b'_1\overrightarrow{a} + b'_2\overrightarrow{b})$ となるので、上の (i), (ii), (iii) および $\det(\overrightarrow{a}\ \overrightarrow{a}) = \det(\overrightarrow{b}\ \overrightarrow{b}) = 0$ に注意して計算すると

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(a'_1\overrightarrow{a} + a'_2\overrightarrow{b}\ \ b'_1\overrightarrow{a} + b'_2\overrightarrow{a}) \\
&= \det(a'_1\overrightarrow{a}\ b'_2\overrightarrow{b}) + \det(a'_2\overrightarrow{b}\ b'_1\overrightarrow{a}) \\
&= a'_1b'_2\det(\overrightarrow{a}\ \ \overrightarrow{b}) - a'_2b'_1\det(\overrightarrow{a}\ \ \overrightarrow{b}) \\
&= (a'_1b'_2 - a'_2b'_1)(\det A) \\
&= (\det A)(\det B)
\end{aligned}$$

となる。

(3) $n=3$ のとき

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a'} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b'} = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{c'} = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix}$ とおく。

このとき、以下 (i), (ii), (iii) が成り立つことに注意する。

(i) 任意の 3 次元ベクトル $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, および 3 文字の置換 σ に対し、

$$(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) = \mathrm{sgn}(\sigma)(\overrightarrow{u}_{\sigma(1)} \times \overrightarrow{u}_{\sigma(2)}, \overrightarrow{u}_{\sigma(3)})$$

ここで、$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は σ の符号。

(ii) 任意の 3 次元ベクトル $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$ に対し、

$$\begin{aligned}
((\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}) &= (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}) + (\overrightarrow{u_2} \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}), \\
(\overrightarrow{u_1} \times (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}), \overrightarrow{w_1}) &= (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}) + (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1}), \\
(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1}, (\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2})) &= (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}) + (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_2}).
\end{aligned}$$

(iii) 任意の 3 次元ベクトル $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{w_1}$ および任意の実数 c に対し

$$((c\overrightarrow{u_1}) \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}) = (\overrightarrow{u_1} \times (c\overrightarrow{v_1}), \overrightarrow{w_1}) = (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1}, c\overrightarrow{w_1}) = c(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1})$$

ここで、AB=$(A\overrightarrow{a'} \;\; A\overrightarrow{b'} \;\; A\overrightarrow{c'})$ =$(a_1'\overrightarrow{a} + a_2'\overrightarrow{b} + a_3'\overrightarrow{c} \;\; b_1'\overrightarrow{a} + b_2'\overrightarrow{b} + b_3'\overrightarrow{c} \;\; c_1'\overrightarrow{a} + c_2'\overrightarrow{b} + c_3'\overrightarrow{c})$ となるので、上の (i), (ii), (iii) および $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ に注意して計算すると

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= ((a_1'\overrightarrow{a} + a_2'\overrightarrow{b} + a_3'\overrightarrow{c}) \times (b_1'\overrightarrow{a} + b_2'\overrightarrow{b} + b_3'\overrightarrow{c}), (c_1'\overrightarrow{a} + c_2'\overrightarrow{b} + c_3'\overrightarrow{c})) \\
&= a_1'b_2'c_3'(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + a_1'b_3'c_2'(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) + a_2'b_1'c_3'(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + a_2'b_3'c_1'(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) \\
&+ a_3'b_1'c_2'(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + a_3'b_2'c_1'(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) \\
&= (a_1'b_2'c_3' - a_1'b_3'c_2' - a_2'b_1'c_3' + a_2'b_3'c_1' + a_3'b_1'c_2' - a_3'b_2'c_1')(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \\
&= (\det A)(\det B)
\end{aligned}$$

となる。

問 2. 定義に従って計算します。

(1) $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 6 + 2 = 8.$

(2) $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 10 + 6 = 16.$

(3) $\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-12\\4\end{pmatrix}$ より、$\det\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\2 & 1 & -1\\0 & 3 & 2\end{pmatrix} = (\begin{pmatrix}6\\-12\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}) = 26$

問 3. (1) ２次元ベクトル $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ で、

$$(\vec{u_1}, \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}) = 1, (\vec{u_1}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}) = 0,$$
$$(\vec{u_2}, \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}) = 0, (\vec{u_2}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}) = 1$$

を満たすものを求める。${}^t(\vec{u_1}\ \vec{u_2})$ が求める逆行列になる。

$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ となるので、もとめる逆行列は

$$\begin{pmatrix}3 & -5\\-4 & 7\end{pmatrix}$$

となる。

(2) (1) と同様にして求めることが出来ます。また、次のような方法もあります。

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ は「ベクトルを原点中心に角度 θ 回転させる行列」なので、その逆行列は「ベクトルを原点中心に角度 $-\theta$ 回転させる行列」になる。

したがって、もとめる逆行列は

$$\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

となる。

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ とおく。

３次元ベクトル v_1, v_2, v_3 で、

$$(\vec{v_1}, \vec{a}) = 1, (\vec{v_1}, \vec{b}) = 0, (\vec{v_1}, \vec{c}) = 0,$$
$$(\vec{v_2}, \vec{a}) = 0, (\vec{v_2}, \vec{b}) = 1, (\vec{v_2}, \vec{c}) = 0,$$
$$(\vec{v_3}, \vec{a}) = 0, (\vec{v_3}, \vec{b}) = 0, (\vec{v_3}, \vec{c}) = 1$$

を満たすものを求める。${}^t(\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3})$ が求める逆行列になる。ところで、$\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ および

$\overrightarrow{b}$ に直行するベクトルなので,

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{v_3} = \frac{1}{(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})}(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とおけばよい。したがって、求める逆行列は、

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \\ -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。