第９回高木レクチャー

平成２３年６月４日（土）
京都大学数理解析研究所
大講義室 420 号室

アブストラクト

S. Brendle: ***Evolution equations in Riemannian geometry***
（リーマン幾何学における発展方程式）

A fundamental question in Riemannian geometry is to find canonical metrics on a given smooth manifold. In the 1980s, R. Hamilton proposed an approach to this question based on parabolic partial differential equations. The goal is to start from a given initial metric and deform it to a canonical metric by means of an evolution equation. There are various natural evolution equations for Riemannian metrics, including the Ricci flow and the conformal Yamabe flow. We will discuss the global behavior of the solutions to these equations. In particular, we will describe how these techniques can be used to prove the Differentiable Sphere Theorem.

リーマン幾何学における基本的な問題として，与えられた微分可能多様体の標準的な計量を見つけよ，というものがある．１９８０年代に，この問題へのアプローチとして，ハミルトンは放物型の偏微分方程式を用いたアプローチを提唱した．与えられた計量を初期条件として出発し，発展方程式を用いて標準的な計量へと変形していく，というのがゴールである．リーマン計量に関しては，リッチ流や共形山辺流など自然な発展方程式がいろいろとある．その大域的な挙動を議論する．特に，このような手法で，微分可能球面定理の証明をどのように証明するかを解説する．

C. E. Kenig: ***Critical nonlinear dispersive equations: global existence, scattering, blow-up and universal profiles***
（臨界非線形分散型方程式：大域存在，散乱理論，解の爆発と普遍漸近形）

We will discuss some recent developments in the area of nonlinear dispersive and wave equations, concentrating on the long-time behavior of solutions to critical problems. The issues that arise are global well-posedness, scattering and finite time blow-up. In this direction we will discuss a method to study such problems (which we call the “concentration compactness/rigidity theorem” method) developed by C. Kenig and F. Merle. The ideas used are natural extensions of the ones used earlier, by many authors, to study critical nonlinear elliptic problems, for instance in the context of the Yamabe problem and in the study of harmonic maps. They also build up on earlier works on energy critical defocusing problems. Elements of this program have also proved fundamental in the determination of “universal profiles” at the blow-up time. This has been carried out in recent works of Duyckaerts, C. Kenig and F. Merle. The method will be illustrated with some concrete examples.

非線形波動・分散型方程式の分野ににおける最近の進展について，特に，スケーリングに関し臨界となるような問題に対し，解の長時 間漸近挙動について解説する．問題としては，時間大域的な適切性，非線形散乱理論および解の有限時間爆発などがある．この方向の研究として，C. Kenig and F. Merle が発展させた研究方法（集約コンパクト性や剛性定理）について解説する．使われるアイディアは，多くの数学者によって，Yamabe の問題や調和写像の問題を研究するために，非線形楕円型方程式で使われてきたものの自然な拡張となっている．我々のアイディアは，正定値なエネルギー半函数をもつエネルギー臨界な問題に関する先行結果にも立脚している．さらに最近，我々のプログラムが，爆発時刻付近の解の“ 普遍漸近形 ”を決定する際に，基本的役割を果たすことも分かってきた．これは，Duyckaerts, Kenig and Merle の一連の仕事によってなされた．我々の方法について，いくつかの具体例を通して概説したい．