The 16th Takagi Lectures

Novebmer 28 (Sat)–29 (Sun), 2015
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo, Tokyo, Japan

ABSTRACT

M. Kashiwara:

Riemann–Hilbert Correspondence for Holonomic* D*-modules
（ホロノミックＤ加群に対するリーマン=ヒルベルト対応）

A classical Riemann–Hilbert problem asks if a liner ordinary differential equation with regular singularities exists for a given monodromy on a curve.

P. Deligne formulated it as a correspondence of the integrable connections with regular singularities on a complex manifold X with a pole on a hypersurface Y on X and the local systems on $X \setminus Y$.

Later the speaker formulated it as an equivalence of the triangulated category $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ of $\mathcal{D}_X$-modules with regular holonomic $\mathcal{D}_X$-modules as cohomologies and that of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ of sheaves on X with $\mathbb{C}$-constructible cohomologies. The equivalence is given by the de Rham functor

$$\mathcal{DR}_X \colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X).$$

Here $\mathcal{DR}_X(\mathscr{M}) = \Omega_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathscr{M}$ with Ω_X the sheaf of differential forms of top degree.

However, it was a long standing problem to generalize it to the (not necessarily regular) holonomic D-module case. Recently, the speaker succeeded it by using enhanced version of indsheaves (joint work with Andrea D'Agnolo).

There are two ingredients for it. One is the notion of indsheaves. The notion of indsheaves is introduced to treat the "sheaf " of functions with tempered growth.

The other ingredient is adding an extra variable. We consider indsheaves on $M \times \mathbb{R}$, not on the base manifold M. This permits us to capture the growth of solutions at singular points.

元来の Riemann–Hilbert 問題は、曲線の上に与えられたモノドロミーをもつ確定特異点型の線形常微分方程式が存在するかという問題であった。

P. Deligne は、これを、複素多様体 X 上の超曲面 Y に極をもつ確定特異点型可積分接続と $X \setminus Y$ 上の局所系との一対一対応として定式化した。

その後、講演者は、これを X 上の確定特異点型ホロノミー$\mathcal{D}_X$-加群の導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ と X 上の $\mathbb{C}$-構成可能層の導来圏 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ の間の導来圏同値として定式化した。

この導来圏同値は、de Rham 関手

$$\mathcal{DR}_X\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$$

によって与えられる。ここに、$\mathcal{DR}_X(\mathscr{M}) = \Omega_X \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathscr{M}$ で、Ω_X は X 上の最高次数微分形式の層である。

しかし、これを (確定特異点型と限らない) ホロノミー D_X-加群の場合に拡張することは、長年の懸案であった。最近、講演者は、 Andrea D'Agnolo とともに、帰納層（indsheaf）を用いることにより、ホロノミー D_X-加群の場合の Riemann–Hilbert 問題を証明することに成功した。

この証明には、2 つの手法が大きな役割を果たした。

一つは、帰納層である。もともと、この概念は、緩増加な関数の “層” を定式化するために導入された概念である。

もう一つは、一変数追加するという手法である。即ち、もとの多様体 M ではなく $M \times \mathbb{R}$ の上の帰納層を考察しようという手法である。

この二つの手法を用いることにより、ホロノミー D-加群の解の特異点における増大の様子を完全に理解することができる。

* * * * * * * * * *

F. Catanese:

Kodaira Fibrations and Beyond: Methods for Moduli Theory
（小平のファイバー空間とその展開—モジュライ空間の方法）

Kodaira fibred surfaces are a remarkable example of projective classifying spaces, and there are still many intriguing open questions concerning them, especially the slope question. The topological characterization of Kodaira fibrations is emblematic of the use of topological methods in the study of moduli spaces of surfaces and higher dimensional complex algebraic varieties, and their compactifications. Our tour through algebraic surfaces and their moduli (with results valid also for higher dimensional varieties) shall deal with fibrations, questions on monodromy and factorizations in the mapping class group, old and new results on Variation of Hodge Structures, Galois coverings, deformations and rigid varieties (there are rigid Kodaira fibrations). These questions lead to interesting algebraic surfaces, for instance surfaces isogenous to a product with automorphisms acting trivially on cohomology, hypersurfaces in Bagnera–de Franchis varieties, Inoue-type surfaces, remarkable surfaces constructed from VHS.

小平曲面は楕円曲線をファイバーとするファイバー空間であり、興味深いことに射影的な分類空間になっている。小平曲面に関しては傾きの問題など興味深い未解決問題がたくさん残っている。小平曲面の位相的特徴付けは、複素多様

体のモジュライ空間やそのコンパクト化の位相的研究の象徴的なものである。代数多様体のモジュライ空間を使ってファイバー空間を研究し、モノドロミー、写像類群、ホッジ構造の変形、ガロア被覆、変形しない多様体などの問題を考える。直積の商であるがコホモロジーには自明に作用する非自明な自己同型を持つ曲面、バニェラ＝ドゥフランキス多様体上の超曲面、井上型曲面、ホッジ構造の変形から作られる興味深い曲面などがこれらの問題の研究を通して得られる。

* * * * * * * * * *

J.-P. Demailly:

Recent Progress towards the Kobayashi and Green–Griffiths–Lang Conjectures

（小林予想および *Green–Griffiths–Lang* 予想の最近の進展）

The study of entire holomorphic curves contained in projective algebraic varieties is intimately related to fascinating questions of geometry and number theory. The aim of the lectures is to present recent progress on the geometric side of the problem.

The Green–Griffiths–Lang conjecture stipulates that for every projective variety X of general type over $\mathbb{C}$, there exists a proper algebraic subvariety of X containing all non constant entire curves $f : \mathbb{C} \to X$. Using the formalism of directed varieties, we will show that this assertion holds true in case X satisfies a strong general type condition that is related to a certain jet-semistability property of the tangent bundle T_X. It is then possible to exploit this result to investigate the long-standing conjecture of Kobayashi (1970), according to which every general algebraic hypersurface of dimension n and degree at least $2n+1$ in the complex projective space $\mathbb{P}^{n+1}$ is hyperbolic.

射影代数多様体内の整正則曲線の研究は、幾何学や数論における魅力的な諸問題と深く関わっている。この講演の目的は、その幾何学的側面について取り上げることにある。

Green–Griffiths–Lang 予想は、一般型の各射影代数多様体 X には、その多様体内のすべての非自明な整正則曲線を含むような真部分多様体が存在するというものである。こうしたことは、実は接束についてのある種のジェット半安定性に結びつくような強い一般型的性質を X がもつ場合に示せることが分かる。このことは、長年の未解決問題である「$n+1$ 次元複素射影空間内の次数 $2n+1$ 以上の一般 n 次元超曲面は小林双曲的であろう」という小林予想（1970）の研究に有効に用いられる。

* * * * * * * * * *

S.-T. Yau:

From Riemann and Kodaira to Modern Developments on Complex Manifolds
（リーマンと小平邦彦から複素多様体論の現代の発展へ）

In the first talk, I shall report on the theory of complex manifolds that are related to Riemann and Kodaira, and also some modern development related to uniformization theorems.

In the second talk, I shall talk about the theory of Kähler Einstein metric and the theory of Donaldson–Uhlenbeck–Yau theory of Hermitian Yang Mills connections. A brief discussion on mirror symmetry will be touched.

第１回目のレクチャーでは、リーマンと小平邦彦に関連した複素多様体の理論および一意化定理に関連した最近の話題について解説する。

第２回目のレクチャーでは、ケーラー＝アインシュタイン計量の理論およびヤンミルズ接続に関するドナルドソン＝ウーレンベック=ヤウの理論の解説を行う。ミラー対称性についても触れる予定である。