The 13th Takagi Lectures

November 16 (Sat)–17 (Sun), 2013
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University, Kyoto, Japan

ABSTRACT

H. Oh:
Apollonian Circle Packings: Dynamics and Number Theory
（アポロニウスの球充填：力学系と整数論）

An Apollonian circle packing is an ancient Greek construction which is made by repeatedly inscribing circles into the triangular interstices of four mutually tangent circles, via an old theorem of Apollonius of Perga (262–190 BC). They give rise to one of first examples of a fractal in the plane. In the first lecture, we will discuss recent results on counting and distribution of circles in Apollonian packings in fractal geometric terms and explain how the dynamics of flows on infinite volume hyperbolic manifolds are related.
A beautiful theorem of Descartes observed in 1643 implies that if the initial four circles have integral curvatures, then all the circles in the packing have integral curvatures, as observed by Soddy, a Nobel laureate in Chemistry. This remarkable integrality feature gives rise to several natural Diophantine questions about integral Apollonian packings such as "how many circles have prime curvatures". In the second lecture, we will discuss progress on these questions while introducing recent developments on expanders and the affine sieve by Bourgain–Gamburd–Sarnak.

アポロニウスの円による平面充填は古代ギリシャにおいて構成された．これは，ペルガのアポロニウス（紀元前 262 年–190 年）の定理に基づいて，円弧からなる 3 角形の間隙に新たな接する円を埋め込むということを繰り返し，常に 4 つの円が互いに接するようにして構成することができる．アポロニウスの円による平面充填は 2 次元におけるフラクタルの最初の例にもなっている．
第一回目の講義では，フラクタルの幾何学の言葉を用いて，アポロニウスの円充填に関する数え上げと分布に関する最近の結果について述べ，無限体積の双曲多様体における力学系がどのように関わっているかについて説明する．
1643 年に発見されたデカルトの美しい定理を用いると，最初の 4 つの円の曲率が整数であれば，その 4 円から出発した円充填に現れるすべての円の曲率も整数になることが証明されることがノーベル化学賞を受賞したソディによって指摘された．この驚くべき整数性は，アポロニウスの整数性をもつ円充填に関して「素数の曲率を持つ円がどのくらい現れるか？」といった自然なディオファントス問題につながる．第二回目の講義ではこれらの問題に関する最近の進展を述べ，エクスパンダーグラフや Bourgain–Gamburd–Sarnak の篩についても紹介する．

G. Tian:
Kähler–Einstein Metrics on Fano Manifolds
（ケーラー・アインシュタイン計量とファノ多様体）

The study of Kähler–Einstein metrics was initiated by E. Calabi in 50's. In 70s, Yau and Aubin solved the existence problem for Kähler–Einstein metrics on compact Kähler manifolds with vanishing or negative first Chern class. Since then, it has been a challenging problem to studying the existence of Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds. A Fano manifold is a compact Kähler manifold with positive first Chern class. There are obstructions to the existence of Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds, first by Matsushima in late 50s, secondly by A. Futaki in early 80s and also K-stability in 90s. These lectures will concern Kähler–Einstein metrics and K-stability. In the first lecture, I will give a brief tour on the study of Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds in last two decades and then discuss recent solution for the existence of Kähler–Einstein metrics on Fano manifolds which are K-stable. I will also discuss key tools used in the solution. In the second lecture, I will focus on the K-stability, its original definition as well as new formulations. I will discuss some recent works on K-stability, particularly, S. Paul's work on stable pairs, which generalize certain fundamental results in the Geometric Invariant Theory, and show how the K-stability can be put in this general setting. Some open problems may be discussed in the end if time permits.

ケーラー・アインシュタイン計量の研究は，50 年代にカラビによって始められました．70 年代にヤウとオーバンは，第一チャーン類が負もしくは 0 のコンパクトなケーラー多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の存在問題を解決しました．そのあと，ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の存在が，難問として研究されてきました．ここで，ファノ多様体とは第一チャーン類が正のコンパクトなケーラー多様体のことです．ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の存在への障害が，初めに 50 年代の後半に松島により，続いて 80 年代初頭に二木により発見され，さらに 90 年代には，K-安定性が発見されました．この講義では，ケーラー・アインシュタイン計量と K-安定性を議論します.
最初の講義では，この二十年間のファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量に関する研究を概観し，最近の K-安定なファノ多様体上の存在問題の解決を説明します．解決のためにキーとなった道具についても解説します.
二番目の講義では，K 安定性に焦点をおき，初めの定義と新しい定式化について説明します．K 安定性に関する最新の研究，特にポールによる幾何学的不変式論の基本的な結果を拡張する，安定なペアに関する結果を議論し，K-安定性がより広い枠組みの中にどのように捉えられるか説明します．時間が許せば未解決問題についても述べたいと思います.