

論文の内容の要旨

修士論文題目

粗幾何学における従順性及びアファイン保測変換群における連結固有対の分類問題

氏名 宮内 俊輔

本論文は二つの PART からなる。以降、それらについての要旨をまとめる。

PART I の要旨

有限生成離散群 G が従順であることは以下で定義される。

定義 A. [vN29] G が従順群であるとは以下の条件を満たす線形汎関数 $m \in (l^\infty(G))^*$ が存在することをいう。

- $f \geq 0$ ならば, $m(f) \geq 0$.
- G 上の定義関数 1_G に関して, $m(1_G) = 1$.
- 任意の $g \in G, f \in l^\infty(G)$ に対して, $m(g \cdot f) = m(f)$.

従順性に対する粗幾何学の観点からの一般化として, Block-Weinberger[BW92], Roe[R03] による Ponzi scheme を用いた特徴づけと, Willett-Yu[WY14], Winkel[Wi21] による特徴づけが知られている。PART I はこれらの一般化に関する話題である。

Ponzi scheme は粗空間上に定義される関数である。Block-Weinberger[BW92] は距離空間において Ponzi scheme を定義し, Roe[R03] はそれを距離構造が仮定されるとは限らない一般の粗空間に拡張した。また, [BW92],[R03] にて, 有限生成離散群 G が Ponzi scheme をもたないことと G が従順群であることの同値性が証明された。このことから, Ponzi scheme は有限生成離散群の従順性に対する粗空間への一般化を与えることがわかる。

Ponzi scheme はその定義から粗空間上の擬格子 (quasi lattice) を台に持つ。この点で Ponzi scheme は離散的な対象といえる。この PART の前半では, 擬格子をとるかわりに測度 μ を用いた, Ponzi scheme の連続的なアナロジー (μ -PS) について考察する。なお, 測度 μ が擬格子上の数え上げ測度であるとき, 定義より Ponzi scheme と μ -PS は同じ概念である。この点で, Ponzi scheme は μ -PS の特別な場合とみなせる。

Willett-Yu[WY14] および Winkel[Wi21] は, 定義 A における不変性の条件 (条件 c) を群構造を課さない粗空間に対して一般化し, 粗空間の従順性の特徴づけた。Willett-Yu[WY14] は離散的な粗空間に対して特徴づけを与え, Winkel[Wi21] は必ずしも離散的とは限らない粗空間に対して, 測度を用いてそれを一般化した。

この PART の後半では Winkel[Wi21] によって定義された従順性の条件と μ -PS の関係を考察する。

以下が PART I の主結果である。

定理 1.1. 可測な粗空間 X が一様な測度 μ をもつと仮定する。このとき, 以下の 3 条件は同値である。

- X は Ponzi scheme をもたない。
- X は μ -PS をもたない。
- X は Winkel の従順性条件を満たす。

条件 1. と条件 2. の同値性によって, 測度が一様なときは, 我々が導入した μ -PS の存在と Ponzi scheme の存在は同値であることがわかる。しかし, μ -PS の存在から Ponzi scheme の存在が導かれる例は今のところ見つかっていない。条件 2. と条件 3. の同値性は粗空間が離散的なときは類似の結果が知られている, すなわち, Willett-Yu[WY14] によって定義された離散的な粗空間の従順性と Ponzi scheme の非存在性は同値であることが, [WY14] にて言及されている。なお, 調べた限り, 条件 1. と条件 3. の同値性について明示的に言及している文献は無いようである。

PARTII の要旨

$H \subset G$ をリー群の閉部分群とする. G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有不連続かつ自由に作用しているとき, Γ を G/H の不連続群と呼ぶ. 不連続群は等質空間を局所構造にもつ空間の大域構造を定めるという点で幾何学的に重要な対象である.

閉部分群 H が非コンパクトなとき, 一般に作用が固有不連続かどうか判定することは難しい. このことから, 小林 [K89] は ‘離散群による作用 $\Gamma \curvearrowright G/H$ が固有不連続か判定せよ’ という問題を提起した. この問題は小林 [K96] によって以下のように再定式化された. この問題 A が PARTII で考察するテーマである.

問題 A ([K96]). 部分集合の対 (L, H) は固有か?

以下でこの用語について説明する.

定義 ([K96]). L, H を局所コンパクト群 G の部分集合とする.

1. 任意のコンパクト集合 S に対して 集合 $L \cap SHS^{-1}$ が相対コンパクトであるとき, 対 (L, H) が固有であると呼ぶ.
2. コンパクト集合 S が存在して $L \subset SHS^{-1}$, $H \subset SLS^{-1}$ となるとき, $L \sim H$ とかく.

Γ が G の離散部分群であるとき, 対 (Γ, H) が固有であることと, Γ が等質空間 G/H に固有不連続に作用することが同値となる (小林 [K96]). よって, 問題 A は固有性判定問題を一般化した問題といえる. また, 関係 $\sim$ は固有性を保つ最も粗い同値関係であることが知られている. ‘最も粗い’ ということは不連続性の双対定理として小林 [K96] によって定式化され, G が簡約群の場合に [K96] で証明された. このことは, G が σ コンパクトな局所コンパクト群の場合に吉野 [Y07] によって拡張された.

G が簡約な場合は小林 [K89], [K96] によって固有性判定法が証明され, 問題 A は解決されている. 一方で, G が非簡約である場合はこの問題 A は未解決である. G が簡約でも可解でもないテストケースとして小林 [K92] によって, $G = GL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, $H = GL_2(\mathbb{R})$ のときの対 (L, H) が固有となる連結部分群 L が分類された.

PARTII では, $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, L, H が連結部分群である場合に問題 A を考察した. 以下が主結果である.

定理 1.2. 1. $G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の連結部分群は同値関係 $\sim$ の差を除いて以下の 8 つに分類され, また, 以下の部分群は記号 $\sim$ の意味で互いに同値でない.

$$\{e\}, \mathbb{R}^2, SL_2(\mathbb{R}), G, S, L, M, N.$$

ここで, S, L, M は以下で定義される連結部分群である.

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} e^a & 0 & e \\ 0 & e^{-a} & 0 \end{pmatrix} \mid a, e \in \mathbb{R} \right\}, L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & e \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid b, e \in \mathbb{R} \right\}, M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & e \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \mid b, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

また, N は M の部分群で, $N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{1}{2}b^2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$ である.

2. 自明群 $\{e\}$ 及び G を除く連結部分群 $\mathbb{R}^2, SL_2(\mathbb{R}), S, L, M, N$ の任意の対の固有性は以下の表の通りである. ここで, 表では部分群の対 (H_1, H_2) が固有であることを $\circ$ で表し, 固有でないことを $\times$ で表している.

表 1 連続部分群の対の固有性

	$SL_2(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^2$	S	L	M	N
$SL_2(\mathbb{R})$	×	○	×	×	○	○
$\mathbb{R}^2$	○	×	×	×	×	○
S	×	×	×	×	×	○
L	×	×	×	×	×	×
M	○	×	×	×	×	×
N	○	○	○	×	×	×

参考文献

- [BW92] Jonathan Block and Shmuel Weinberger, *Aperiodic tilings, positive scalar curvature and amenability of spaces*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 4, 907–918. MR 1145337
- [K89] Toshiyuki Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), no. 2, 249–263. MR 1016093
- [K92] ———, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Representation theory of Lie groups and Lie algebras (Fuji-Kawaguchiko, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, pp. 59–75. MR 1190750
- [K96] ———, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory **6** (1996), no. 2, 147–163. MR 1424629
- [R03] John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 2007488
- [vN29] John von Neumann, *Zur allgemeinen theorie des masses*, Fund. Math. **13** (1929), no. 1, 73–111.
- [Wi21] Jeroen Winkel, *Geometric property (T) for non-discrete spaces*, J. Funct. Anal. **281** (2021), no. 8, Paper No. 109148, 36.
- [WY14] Rufus Willett and Guoliang Yu, *Geometric property (T)*, Chinese Ann. Math. Ser. B **35** (2014), no. 5, 761–800. MR 3246936
- [Y07] Taro Yoshino, *Discontinuous duality theorem*, Internat. J. Math. **18** (2007), no. 8, 887–893. MR 2339574