多変数多項式の終結式と判別式

1. 終結式

$\mathbb{P}^n_k$ n次元射影空間 $\mathrm{Proj}\ k[T_0, \dots T_n]$

$k = \mathbb{C}$, 体, $\mathbb{Z}$, ...

$f_0, \dots f_n$ n+1変数同次多項式 次数 $d_0, \dots, d_n$

$V = V(f_0, \dots f_n)$ 共通零点

$H_0, \dots H_n$ 超曲面 次数 $d_0, \dots d_n$

$= H_0 \cap \dots \cap H_n$

終結式:

$V \neq \phi$ となるための $f_0, \dots f_n$ に関する条件を与える

幾何的性質 → $f_0, \dots f_n$ の係数の同次多項式

超曲面のモジュライ (PGLでわらない)

$E = k^{n+1} = kT_0 \oplus \dots \oplus kT_n$　　$\mathbb{P}^n_k = \mathbb{P}(E)$

$$S^d E \subset S^\cdot E = k[T_0, \dots T_n]$$

$$S^d E = \bigoplus_{|I|=d} kT^I$$

$I = (i_0, \dots, i_n)$　$|I| = i_0 + \dots + i_n$

$T^I = T_0^{i_0} \dots T_n^{i_n}$

$(S^d E)^\vee$ 双対空間　$(C_I)_{|I|=d}$ 双対基底

$$P_d = \mathbb{P}((S^d E)^\vee) = \mathrm{Proj}\ k[C_I : |I| = d].$$

$$P_d(k) = \left\{ (C_I) \in k^{\{I : |I|=d\}} \setminus \{0\} \right\} / k^\times$$

$= \{d$次同次多項式 $\neq 0\} /$ 定数倍

$\mathbb{P}^n_k$ 内の d次超曲面のモジュライ

$X_d \subset \mathbb{P}^n \times P_d$ 普遍超曲面

$$F_d = \sum_{|I|=d} \underset{1次}{C_I}\, \underset{d次}{T^I}$$

$\mathbb{d} = (d_0, \dots, d_n)$

$$\begin{array}{ccccc}
V_{\mathbb{d}} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n \times \underbrace{P_{d_0} \times \cdots P_{d_n}}_{P_{\mathbb{d}}\ 同次多項式系のモジュライ} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\
\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle pr_2} & & \\
R_{\mathbb{d}} & \hookrightarrow & P_{\mathbb{d}} & &
\end{array}$$

$V(f_0, \dots, f_n) \neq \phi \iff ([f_0], \dots, [f_d]) \in R(k)$

$V_d \subset \mathbb{P}^n \times P_d$ 余次元 $n+1$

$R_{\mathbb{d}} \subset P_{\mathbb{d}}$ 余次元 1.

命題. $V_{\mathbb{d}}$ の dense open subset 上で $V_{\mathbb{d}} \to P_{\mathbb{d}}$ は imm.

系 $R_{\mathbb{d}}$ は $P_{\mathbb{d}}$ の divisor であり. R_d を定義する

同次多項式 係数の多項式

$$\mathrm{Res}(F_{d_0}, \dots, F_{d_n}) \in S^{d_0^\vee}((S^{d_0}E)^\vee) \otimes \cdots \otimes S^{d_n^\vee}((S^{d_n}E)^\vee)$$

が定数倍を除き一意的に定まる 整係数.

$\uparrow\ (d_i^\vee \cdot d_i = d_0 \cdots d_n)$

$k = \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$

$(f_0, \dots, f_n) = (T_0^{d_0}, \dots, T_n^{d_n})$ のとき $\mathrm{Res}(\quad) = 1$

次数の計算　交点理論

$$CH^1(\mathbb{P}^n \times P_d) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n+1} \qquad H_i \cdot d_i h + h_i$$

$$[V] = (d_0 h + h_0) \cdots (d_n h + h_n)$$

h^n の係数 $\sum_i d_i \check{h}_i$

2 判別式

$X \subset \mathbb{P}^n$ d次超曲面　$f \in S^d E$ 定義方程式

判別式

X が特異点をもつための f に関する条件を与える f の係数の同次多項式

普通的

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_d & \subset & X_d \subset \mathbb{P}^n \times P_d & & X_d \ (F_d = 0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ D_d & \hookrightarrow & P_d & & \end{array}$$

$\Delta_d = (D_0 F, \ldots D_n F)$　偏微分

$X = (f = 0)$ が singular $\Leftrightarrow$ $[f] \in D_d$.

Eulerの関係式　$dF = T_0 \cdot D_0 F + \cdots + T_n \cdot D_n F$.

$\Delta_d \subset \mathbb{P}^n \times P_d \to \mathbb{P}^n$　proj. sp b'dle.　余次元 $n+1$

$D_d \subset P_d$ 余次元1.　D_d を定義する同次多項式が定数倍を除き一意的に定まる.　$\mathrm{Disc}(F)$

$\{\pm 1\}$

d が可逆なら　$\Delta_d = V(D_0 F, \ldots, D_n F)$ $\Leftarrow$ Euler.

$\rightarrow$ $\mathrm{Disc}(F) = \mathrm{Res}(D_0 F, \ldots, D_n F)$ の定数倍. $(n+1)(d-1)^n$ 次数

定数の決定

定理 (Demazure ~'60s)

$a(n,d) = \dfrac{(d-1)^{n+1} - (-1)^{n+1}}{d}$ とおくと

$$\mathrm{Disc}\, F = \frac{1}{d^{a(n,d)}} \mathrm{Res}(D_0F, \dots, D_nF)$$

証明 $f = T_0^d + T_0 T_1^{d-1} + \cdots + T_{n-1} T_n^{d-1}$ で定まる超曲面は 素d のまわりを除く標数で非特異

$(D_0 f, \dots, D_n f)$

$= (dT_0^{d-1} + T_1^{d-1},\ (d-1)T_0 T_1^{d-2} + T_2^{d-1},\ \dots,\ (d-1)T_{n-2}T_{n-1}^{d-2} + T_n^{d-1},\ (d-1)T_{n-1}T_n^{d-2})$

の $\mathrm{Res} = r(n,d)$ とおく

漸化式

$r(n,d) = (d-1)^{(d-1)^n} (-1)^{d-1}\, r(n-2,d)^{d-1}\, r(n-1,d)^{d-2}$

$a(n,d) = (d-1)\, a(n-2,d) + (d-2)\, a(n-1,d)$

$b(n,d) = (d-1)^n + (d-1)\, b(n-2,d) + (d-2)\, b(n-1,d)$

$$r(n,d) = (1-d)^{b(n,d)}\, d^{a(n,d)}$$

$r(1,d) = (d-1)^{d-1} (-1)^{d-1} d^{d-2}$ $\qquad a(1,d) = d-2$

$r(0,d) = d \qquad a(0,d) = 1,\ b(0,d) = 0 \qquad b(1,d) = d-1$

$$b(n,d) = (d-1)\frac{(nd+1)(d-1)^n - (-1)^n}{d^2}$$