微積分や線形代数の理解を圏論で深めたい

微分積分，線形代数，位相など，いわゆる大学数学の基礎を学びました．
圏論をつかって，これらの理解を深められないでしょうか．

斎藤　毅
東京大学大学院数理科学研究科

数学の対象そのものだけでなくその間の射や，異種の対象や射を結びつける関手を重視する．

圏論的な考えかたを，辞書のように説明すればこうなります．線形代数でいえば線形空間よりも線形写像，位相でいえば位相空間よりも連続写像に注目します．微分積分はあとまわしにして，線形代数からはじめましょう．

1 ●線形代数—行列とベクトルの積と線形写像

線形写像は線形空間のなす圏の射です．線形写像は行列であらわされます．線形代数をはじめて学ぶときにとまどうのが行列とベクトルの積ではないでしょうか．この積の定義の理由は，線形空間の基底の圏論的な意味をつかって説明できます．

話が抽象的になりますが，$\mathbf{R}^n$ の n 個のベクトル $x_1, \ldots, x_n$ が線形空間 $\mathbf{R}^n$ の基底であるとは，圏論的には次の条件 (A) がなりたつことです：

(A)　線形写像 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ をその値の組 $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ にうつす写像 $\{$ 線形写像 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m\} \to \{\mathbf{R}^m$ の元 n 個の組 $\}$ は 1 対 1 対応である．

逆写像 $\{\mathbf{R}^m$ の元 n 個の組 $\} \to \{$ 線形写像 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m\}$ は，m 次元ベクトル n 個の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ を $f(b_1x_1 + \cdots + b_nx_n) = b_1a_1 + \cdots + b_na_n$ で定まる写像 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ にうつすものです．

行列の話に戻ります．m 次元ベクトル n 個の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ と，その成分 $a_1, \ldots, a_n$ をならべた m 行 n 列の行列 A を同じものと考えましょう．$\mathbf{R}^n$ の基底として標準基底 $e_1, \ldots, e_n$ を考えれば，条件 (A) の 1 対 1 対応で行列 A に対応する線形写像 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ は，ベクトル $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ を $f(b) = b_1a_1 + \cdots + b_na_n$ にうつします．これが行列 A とベクトル b の積を

$$Ab = b_1a_1 + \cdots + b_na_n$$

で定める理由です．m 行 n 列の行列は線形写像 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ をあらわすツールと考えて，線形写像の自然なあらわしかたを条件 (A) の 1 対 1 対応をつかって定めています．

もう少し深入りして表現可能関手のことばをつかえば，線形空間 V を集合 $\{V$ の元 n 個の組 $\}$ にうつす関手は $\mathbf{R}^n$ とその基底で表現される，と上の条件 (A) は一般化されます．

抽象的な線形空間を考えるときも，その基底をとれば線形写像を行列であらわすことができます．このことは，有限次元線形空間のなす圏と，対象が自然数の集合 $\mathbf{N}$ で，射 $n \to m$ の集合は m 行 n 列の行列の集合 $M(m, n; \mathbf{R})$，射の合成は行列の積として定まる圏が同値であることの帰結です．本稿では圏の同値についてまで説明できないので，興味のあるかたは [4] の第 1 章をごらんください．

2 ● 位相—積空間の普遍性と位相空間の連結性

圏論的な考えかたが必要になるところといえばまず思いつくのが，積空間の位相の定義です．これもなぜそう定義するのか一見わかりにくいですが，定義の理由は積空間の普遍性にあります．

ほかの位相空間 T から積空間 $X \times Y$ への連続写像 $T \to X \times Y$ は，連続写像 $T \to X$ と $T \to Y$ の対に 1 対 1 に対応する，というのが積空間の普遍性です．表現可能関手のことばをつかえば，位相空間 X が表現する関手と Y が表現する関手の積関手を表現するように，位相空間 $X \times Y$ を定義しているということです．位相空間に限らず一般の圏でも，積対象はこのように定義されます．

積はこのくらいにして，連結性の話をします．位相空間が連結とは，2 つに切り離すことができないという意味です．圏論的にいえば，位相空間を切り離すとは，離散位相空間への連続写像を与えることです．なので位相空間 X が連結であるとは，離散位相空間への連続写像を考える限り，1 点だけからなるどうみても連結な位相空間 $1 = \{0\}$ と区別がつかないことと定義できます．

ちゃんと書くと次のようになります．$p\colon X \to 1$ をただ 1 つの連続写像とします．このとき位相空間 X が連結であるとは，T を離散位相空間とすると，写像 $f\colon 1 \to T$ を合成写像 $f \circ p\colon X \to T$ にうつす写像 $p^*\colon \{$ 写像 $1 \to T\} \to \{$ 連続写像 $X \to T\}$ が 1 対 1 対応になることです．T としては，2 点だけからなる離散位相空間 $\{0, 1\}$ に限っても十分です．この定義は，X で中間値の定理がなりたつことと同値な条件であることがわかります．

余談になりますが，[2] では位相空間の連結性を上の条件をつかって調べています．この条件によると空集合は連結でないことになるのですが，[5] をはじめほとんどの本では空集合も連結であると定義しています．ブルバキのこの定義は間違いではないですかと，ブルバキのひとりだったセールさんに聞いてみる機会がありました．そのときの答えは，それはそうだがもう手遅れだ，でした．手遅れではないとわたしは思っているのですが．みなさんはどう思われますか？

3 ●微積分—合成関数の微分の公式

微積分での圏論的な現象といえば，合成関数の微分の公式です．これを圏をつかって定式化してみましょう．対象としては開区間 U とその 1 点 $a \in U$ の対 (U, a) を考えます．(U, a) から (V, b) への射は微分可能な関数 $f\colon U \to V$ で $b = f(a)$ をみたすもの，射 $f\colon (U, a) \to (V, b)$ と $g\colon (V, b) \to (W, c)$ の合成 $g \circ f$ は合成関数 $g \circ f\colon (U, a) \to (W, c)$ として定まる圏 C_1 を考えます．もう 1 つ，対象は 1 次元線形空間 $\mathbf{R}$ だけで，射は線形写像 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$，射の合成は写像の合成という圏 T_1 も考えます．

合成関数の微分の公式

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

は，射 $f\colon (U, a) \to (V, b)$ を $f'(a)$ 倍写像 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ にうつすことで，関手 $C_1 \to T_1$ が定まるということをあらわしています．これだけだと簡単なことを難しくいってみただけのようですが，変数や関数の個数が増えるとありがたみがでてきます．圏 T_1 のただ 1 つの対象 $\mathbf{R}$ は U の a での接空間で，その基底 1 は接ベクトル $\dfrac{d}{dx}$ をあらわしています．

積の微分の公式も，上の構成を 2 変数に拡張すれば，2 変数関数 xy との合成に関する関手性と解釈できます．考えてみてください．

●参考文献

［1］ 斎藤毅『線形代数の世界』東京大学出版会，2007
［2］ 斎藤毅『集合と位相』東京大学出版会，2009
［3］ 斎藤毅『微積分』東京大学出版会，2013
［4］ 斎藤毅『数学原論』東京大学出版会，2020
［5］ ブルバキ『数学原論』位相 1　東京図書，1968

[さいとうたけし]