数論幾何における Galois 表現

斎藤 毅

有理数体上定義された代数多様体のエタール・コホモロジーは, 有理数体の絶対 Galois 群の ℓ 進表現を定める. ℓ 進表現の各素数 p でのようすがどのようにわかるか, そしてどんなことがまだわからないか解説する. 多様体がよい還元をもたないような素数 p ではとくに, 分岐とよばれるおもしろい現象がおきる. この分岐について, 最近わかってきたことを中心に紹介する.

[1] にも関連する話題の解説があります. そちらもあわせてご覧ください.

1 数論における局所と大域

1.1 ベータ関数と Jacobi 和の類似

ベータ関数

$$B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx$$

の数論的な類似に, Jacobi 和

$$J(a,b)=\sum_{x\neq 0,1\in \mathbf{F}p}\chi^a(x)\chi^b(1-x)$$

というものがある. この類似は, 形式的には次のようなものである. ベータ関数の方では, x の巾という関数は実数体の乗法群 $\mathbf{R}^\times$ の指標で, ベータ関数は, それを和が 1 になるところでかけてたしあわせたものである. Jacobi 和でも同様で, χ は有限体の乗法群 $\mathbf{F}_p^\times$ の指標で, Jacobi 和は, それを和が 1 になるところでかけてたしあわせたものである. ベータ関数と Jacobi 和はたがいによく似た性質をもっている.

この類似は, じつはもっと幾何的なところからきている. C_n を方程式 $X^n+Y^n=1$ で定義される代数曲線とする. この曲線 C_n を Fermat 曲線という. ベータ関数 $B(s,t)$ も Jacobi 和 $J(a,b)$ も, ともに Fermat 曲線 C_n のコホモロジーから生じてくるのである. まずベータ関数 $B(s,t)$ の方からみてみよう. 一般に有理数体 $\mathbf{Q}$ 上定義された代数多様体 X の, 特異コホモロジー $H^q(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})$ と代数的 de Rham コホモロジー $H^q_{dR}(X/\mathbf{Q})$ の比較同型 $H^q(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}\to H^q_{dR}(X/\mathbf{Q})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$ に現れる積分を周期積分とよぶ. s,t が分母が n の有理数のときは, ベータ関数 $B(s,t)$ は実は Fermat 曲線の $H^1(C_n)$ に現れる周期積分となっている.

一方 n をわらない素数 p に対しては, Fermat 曲線 C_n の $\mathbf{F}_p$ 有理点の個数は Jacobi 和 $J(a,b)$ を使って表わすことができる [2]. 有限体上の多様体の有理点の個数は, コホモロジーと結びついている. エタール・コホモロジーは, 合同ゼータ関数についての Weil 予想の解決を目標として Grothendieck によって定義され [3], 実際それを使って Weil 予想が解決された [4] ことをご存知のかたは多いと思う. 合同ゼータ関数は, もともと $\mathbf{F}_{p^m}$ 有理点の個数の母関数として定義される. これがコホモロジーへの Frobenius 作用素の

固有多項式として表わされるというのがこの証明の基本なのだった．このような意味で, Jacobi 和 $J(a,b)$ は Fermat 曲線 C_n のコホモロジーを表わしている．

このように Fermat 曲線 C_n のコホモロジーは, 有理数体を複素数体の部分体としてみるときはベータ関数として, また素数 p を法とする還元からは Jacobi 和として現れてくる．

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{Fermat 曲線 } C_n & \Rightarrow & & H^1(C_n) & & (\text{大域}) \\
& & \mathbf{C} \swarrow & & \searrow p & \\
& & \text{ベータ関数} & & \text{Jacobi 和} & (\text{局所})
\end{array}
$$

このようなみかたが, 現代の数論における局所と大域の考え方の原形なのである．

1.2 Galois 群の ℓ 進表現

$S = \{\text{ 素数 }\} \amalg \{\infty\} = \{2, 3, 5, 7, \ldots, \infty\}$ とおく．S を代数曲線のようなものと考え, 有理数体をその関数体と考えるのが, 標準的なみかたである．無限素点 ∞ は有理数体 $\mathbf{Q}$ の実数体 $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$ へのうめこみのことである．各素数 p は, 有理数体 $\mathbf{Q}$ の p 進体 $\mathbf{Q}_p$ へのうめこみを定める．これを有限素点とよび, 有限素点と無限素点を完全に対等なものとして扱おうというのが現代の数論の基本的な姿勢である．このように考えたとき, S(正確にはその開集合) 上の局所定数層あるいは局所系とよぶべきものが, $\mathbf{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{Q}}$ の ℓ 進表現である．

位相幾何では, 位相空間 S 上の局所系はその空間の基本群 $\pi_1(S)$ の表現と同じものである．基本群 $\pi_1(S)$ は空間 S の被覆を統制している．上の $S = \{2, 3, 5, 7, \ldots, \infty\}$ (の開集合) に対しては, 絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{Q}}$ が, その被覆を統制する．そこで $G_{\mathbf{Q}}$ の表現が S 上の局所系を与えると考えるのである．

$\mathbf{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ とは, $\mathbf{Q}$ の代数閉包 $\bar{\mathbf{Q}}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbf{Q}})$ のことである．素数 ℓ に対し, $G_{\mathbf{Q}}$ の ℓ 進表現とは ℓ 進体 $\mathbf{Q}_\ell$ 上の有限 (n) 次元線型空間 V への連続表現 $G_{\mathbf{Q}} \to GL_{\mathbf{Q}_\ell}(V) (\simeq GL_n(\mathbf{Q}_\ell))$ のことをいう．素数は S の点を表わすときには文字 p を使い, S 上の局所系の係数体を表わすときは ℓ を使う習慣となっている．ℓ 進表現だけでは, 無限素点の扱いかたが不十分なので, さらにこれと対応する Hodge 構造と対にして考える必要がある [5].

有理数体上定義された代数多様体や, 保型形式などに対し, Galois 群 $G_{\mathbf{Q}}$ の ℓ 進表現 (と Hodge 構造の対) を対応させることができる．

$$
\text{代数多様体,}\quad \text{保型形式} \quad \Rightarrow \quad \ell \text{ 進表現 } (+ \text{ Hodge 構造}).
$$

このような対応により, 有理数体上の代数幾何的あるいは表現論的対象を, より線型代数的な対象である ℓ 進表現をつかって調べることができる．またその逆に, Galois 表現という数論的に重要な対象を, 幾何的な方法や表現論的な方法をつかって調べることもできる．代数多様体の例として Fermat 曲線をとると, 上のものになる．

実際に Galois 表現を構成する手段は, おもにエタール・コホモロジーである．この他にも基本群を用いるもの, 合同性を用いるものなどがあるが, ここではふれない．X を有理数体上定義された代数多様体とし, ℓ を素数とすると, ℓ 進エタール・コホモロジー $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ は $G_{\mathbf{Q}}$ の ℓ 進表現を与える．エタール・コホモロジー $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ は, $\mathbf{Q}_\ell$ 線型空間としては, $\bar{\mathbf{Q}}$ の $\mathbf{C}$ へのうめこみをひとつ決めれば, 特異コホモロジーの係数拡

大 $H^q(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_\ell$ と同型である．これと対をなす Hodge 構造は特異コホモロジーと代数的 de Rham コホモロジーの比較同型 $H^q(X(\mathbf{C}),\mathbf{Q})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}\to H^q_{dR}(X/\mathbf{Q})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$ から定まる．

例 1. E を有理数体 $\mathbf{Q}$ 上定義された楕円曲線とする．Tate 加群 $T_\ell E=\varprojlim_n \mathrm{Ker}(\ell^n: E(\bar{\mathbf{Q}})\to E(\bar{\mathbf{Q}}))$ は, 階数 2 の自由 $\mathbf{Z}_\ell$-加群であり, 自然な Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ の表現をもつ．E のエタール・コホモロジー $H^1(E_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell)$ は, 双対空間 $Hom(T_\ell E,\mathbf{Q}_\ell)$ と標準同型である．$E(\mathbf{C})$ を $\mathbf{C}$ の格子 T による商 $\mathbf{C}/T$ として表わせば, $T_\ell E\simeq T\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_\ell$ であり, $H^1(E_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell)\simeq Hom(T,\mathbf{Q}_\ell)$ である．

2. $f=\sum_{q=1}^\infty a_nq^n$ を, すべての Hecke 作用素 T_n の同時固有ベクトルであるような, 正規化されたカスプ形式とする．このとき, Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ の 2 次元 ℓ 進表現 V_f で, ほとんどすべての素数 p で不分岐かつ $\mathrm{Tr}(Fr_p:V_f)=a_p$ をみたすものが構成できる [6]. これを保型形式 f にともなう ℓ 進表現という．

Fermat 予想が, 楕円曲線や保型形式からこのように構成される Galois 表現を使って証明された [7] ことは記憶に新しい. 有理数体上定義された楕円曲線に対し, 上の例 1 のようにしてえられる ℓ 進表現が, 例 2 のように保型形式から定まる ℓ 進表現であることを示すことによって, Fermat 予想が解決されたのだった ([8] 参照).

1.3 合同ゼータ関数と Galois 表現

$S=\{2,3,5,7,\dots,\infty\}$ 上の局所系を調べるには, まず S の各点ごとに調べるのが標準的な方法である．S の各点は, 非自明な基本群をもつ S^1 のようなものである．なぜなら S の各点は素数 p であり, その点の基本群は有限体 $\mathbf{F}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{F}_p}$ と考えられる．絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{F}_p}=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$ とは, 有限体 $\mathbf{F}_p$ の代数閉包 $\bar{\mathbf{F}}_p$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbf{F}}_p)$ のことである．p 乗写像 $\varphi_p:\bar{\mathbf{F}}_p\to\bar{\mathbf{F}}_p$ は絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{F}_p}$ の位相的な生成元である．この元の逆元を Fr_p で表わし幾何的 Frobenius とよぶ．以下絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{F}_p}$ を同型 $\hat{\mathbf{Z}}\to G_{\mathbf{F}_p}:1\mapsto Fr_p$ により, $\mathbf{Z}$ の pro 有限完備化 $\hat{\mathbf{Z}}$ と同一視する．このように, S の各点は, $\mathbf{Z}$ の完備化を基本群にもち, S^1 とよくにたものである．S 上の局所系は, S の各点でのようすでほぼ決まってしまうことが, Chebotarev 密度定理から従う．だから, S 上の局所系を S の各点ごとに調べることは, 特にだいじなことである.

X を有理数体 $\mathbf{Q}$ 上定義された n 次元射影非特異代数多様体とする．X の ℓ 進コホモロジーを $G_{\mathbf{Q}}$ の ℓ 進表現として各素数 p ごとにしらべるには, X の p を法とする還元 $X \bmod p$ を調べればよい．これからみるように, そのためには, ほとんどの素数 p については, $X \bmod p$ の合同ゼータ関数がわかれば十分である．X が p でよい還元をもつとは, X を整数係数の方程式で定義したときに, この方程式を p を法として還元したものによって定義される有限体 $\mathbf{F}_p$ 上の多様体 $X \bmod p$ が, $\mathbf{F}_p$ 上の射影非特異代数多様体となるということをいう．有限個の素数をのぞき, X は p でよい還元をもつ.

たとえば E が, 整数係数の方程式 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ で定義される $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線のときは, $6\Delta=6(g_2^3-27g_3^2)$ をわらない素数で E はよい還元をもつ．Fermat 曲線 C_n は n をわらない素数でよい還元をもつ．レベル N のモジュラー曲線 $X_0(N)$ は N をわらない素数でよい還元をもつ.

X が素数 p でよい還元をもちさらに p が ℓ と異なるとすると, ℓ 進エタール・コホモロジー $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell)$ の p でのようすは, $X \bmod p$ の合同ゼータ関数によって次のようにしてわかる [9]. 2.1 で説明するように, このとき, p での幾何的 Frobenius Fr_p の $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell)$ への作用が定義される．この作用素の固有多項式 $P_q(t)=\det(1-Fr_pt:H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}},\mathbf{Q}_\ell))$

について, 次の等式がなりたつ

$$\frac{P_1(t)\cdot\cdots\cdot P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\cdot P_2(t)\cdot\cdots\cdot P_{2n}(t)} = \exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(X \bmod p \text{ の } \mathbf{F}_{p^m} \text{ 有理点の個数})}{m}t^m.$$

右辺が有限体上の多様体 $X \bmod p$ の合同ゼータ関数 $Z(X \bmod p, t)$ の定義である. 2.4 で紹介する Weil 予想の帰結として, 多項式 $P_q(t)$ はたがいに共通根をもたず左辺のような分解が一意的に定まることが従う. いいかえれば, 固有多項式 $P_q(t) = \det(1 - Fr_p t : H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell))$ は, $X \bmod p$ の有理点の個数を数えることで, 求められるのである.

$$\begin{array}{rcc} (X \bmod p \text{ の } \mathbf{F}_{p^m} \text{ 有理点の個数}) & \Rightarrow & \text{合同ゼータ関数 } Z(X \bmod p, t) \\ & \Rightarrow & \ell \text{ 進表現 } H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell) \text{ の } p \text{ でのようす} \end{array}$$

E を $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線とし, p を E がよい還元をもつ素数とする. 整数 $a_p(E)$ を ($E \bmod p$ の $\mathbf{F}_p$ 有理点の個数) $= p + 1 - a_p(E)$ となるように定めると, $P_1(t) = 1 - a_p(E)t + pt^2$ となる. X が Fermat 曲線 C_n のときは, 位数がちょうど n の $\mathbf{F}_p$ の指標 χ を任意にとると,

$$P_1(t) = \prod_{a,b,a+b\not\equiv 0 \bmod n}(1 - J(a,b)t)$$

となる. このように Jacobi 和によって, エタール・コホモロジー $H^1(C_{n,\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ の素数 p でのようすが記述される. p が N をわらなければ, レベル N のモジュラー曲線 $X_0(N) \bmod p$ の合同ゼータ関数の分子 $P_1(t)$ は, 重さ 2 でレベルが N の約数の保型形式 $f_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f_i)q^n$ に対する $1 - a_p(f_i)t + pt^2$ のいくつかの積として表わされる [10].

このように合同ゼータ関数を使うと Galois 表現の素数 p でのようすがわかる. しかし, このような一般論で p でのようすがわかるためには, 素数 p が次の条件をみたしてなければいけない.

0. X が p でよい還元をもち, $\ell \neq p$.

いま X と ℓ を 1 つ決めて考えると, $S = \{2, 3, 5, 7, \ldots, \infty\}$ の点のうちでこの条件をみたさないものは, 有限個で次の 3 種類のどれかである.

1. 無限素点 ∞.
2. $p = \ell$.
3. X が p でよい還元をもたないような素数 $p \neq \ell$.

したがって S の点は次の 4 種類に分けられる.

$$S = \{\text{ よい素数 }\} \amalg \{\infty\} \amalg \{\ell\} \amalg \{\text{ わるい素数 }\}$$

ℓ 進表現の S の各点でのようすは, S の有限個の点をのぞき合同ゼータ関数でよくわかる. 残りの点のうち, 1 は Hodge 理論だから, ここではこれ以上ふれない. 2 の場合を扱うのが p 進 Hodge 理論である. これについては Fontaine, Messing, Faltings, 兵頭, 加藤, 辻らにより, 現在ではほぼ満足すべき一般論ができている [12]. これについてもここではこれ以上ふれない. 3 の場合を扱うのが分岐理論である. 3 のような素数には, と

くに個々の多様体の個性があらわれる．ここからは, おもに分岐理論の最近の進歩について解説する．

2 局所体の Galois 表現

2.1 局所体の Galois 群

局所系が退化する点でのようすを調べるには, その点のまわりのモノドロミーの作用をみるのがふつうの方法である．同じように, X が p でよい還元をもたないような素数 p での $G_{\mathbf{Q}}$ の ℓ 進表現 $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ のようすをみるには, p 進体の絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \subset G_{\mathbf{Q}}$ への制限を考えるのがよい．絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{Q}_p}$ の構造は次のようになっている [11].

$\mathbf{Q}_p$ に 1 の p と素な位数の 1 の巾根をすべて添加して得られる体 $\mathbf{Q}_p(\zeta_m, p \not| m)$ を, $\mathbf{Q}_p$ の最大不分岐拡大とよび $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ で表わす．さらに $\mathbf{Q}_p$ の最大不分岐拡大に p の p と素な巾乗根をすべて添加して得られる体 $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ur}}(p^{1/m}, p \not| m)$ を, $\mathbf{Q}_p$ の最大馴分岐 (tamely ramified) 拡大とよび $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{tr}}$ で表わす．Galois 理論により, これらの拡大に対応する $G_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ の正規部分群を

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{Q}_p & \subset & \mathbf{Q}_p^{\mathrm{ur}} = \mathbf{Q}_p(\zeta_m, p \not| m) & \subset & \mathbf{Q}_p^{\mathrm{tr}} = \mathbf{Q}_p^{\mathrm{ur}}(p^{1/m}, p \not| m) & \subset & \bar{\mathbf{Q}}_p \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
G_{\mathbf{Q}_p} & \supset & I & \supset & P & \supset & 1
\end{array}
$$

と書く習慣である．I を惰性群, P を暴 (wild) 惰性群とよぶ．

商群 $G_{\mathbf{Q}_p}/I$ は標準的に有限体 $\mathbf{F}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{F}_p} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$ と同一視される．有限体 $\mathbf{F}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{F}_p}$ は, $\mathbf{Z}$ の pro 有限完備化 $\hat{\mathbf{Z}} = \varprojlim_n \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ と写像 $1 \mapsto Fr_p$ (=幾何的 Frobenius) により同一視されることをおもいだしておこう．商群 I/P は標準的に $\bar{\mathbf{F}}_p$ 内の 1 の m 乗根の群 $\mu_m = \{\zeta \in \bar{\mathbf{F}}_p | \zeta^m = 1\}$ の逆極限 $\varprojlim_{p \not| m} \mu_m$ と同一視される．この群は非標準的には $\hat{\mathbf{Z}}$ から p 成分を除いたもの $\hat{\mathbf{Z}}'$ と同型である．これが, 位相幾何的なモノドロミーと対応するものである．P は整数論特有のもので, かなり大きな pro-p 群である．どのくらい大きいかというと, だいたい離散群 $\bar{\mathbf{F}}_p$ の Pontryagin 双対を可算無限個積み重ねたぐらいの大きさである．

$$
\begin{array}{lll}
G_{\mathbf{Q}_p}/I & = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p) = \hat{\mathbf{Z}} & \text{Frobenius が位相的生成元,} \\
I/P & = \varprojlim_{p \not| m} \mu_m \simeq \hat{\mathbf{Z}}' & \text{位相幾何的なモノドロミーに対応,} \\
P & & \text{整数論特有の大きな pro-}p\text{ 群.}
\end{array}
$$

絶対 Galois 群 $G_{\mathbf{Q}_p}$ の ℓ 進表現 V は, 惰性群 I への制限が自明なとき, 不分岐であるという．同型 $G_{\mathbf{Q}_p}/I \to G_{\mathbf{F}_p}$ により, $G_{\mathbf{Q}_p}$ の不分岐表現とは, $G_{\mathbf{F}_p}$ の表現のことであり, さらにこれは, 生成元 Fr_p の作用で定まる．多様体 X が $p \neq \ell$ でよい還元をもつときは, ℓ 進表現 $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ は p で不分岐なので, ここへの $G_{\mathbf{Q}_p}$ の作用は Fr_p の作用で決まってしまう．そして, Fr_p の固有多項式は合同ゼータ関数で決まるのだった．

ここからは多様体 X が p でよい還元をもたない場合を考える．このときは $G_{\mathbf{Q}_p}$ の分岐する ℓ 進表現 V を考えることになる．これについて, 次の 2 とおりの問題を考える．

A. $G_{\mathbf{Q}_p}$ の分岐する ℓ 進表現 V の同型類を決定するにはどうすればよいか．

B. ℓ 進表現 V の分岐から生じる不変量はどのように求められるか.

以下では, A,B それぞれについて, 問題の定式化と, それらについての最近の進歩について紹介する. $G_{\mathbf{Q}_p}$ の ℓ 進表現 V の同型類は, よい素数では, ほぼ合同ゼータ関数で決まる. A のほうは, わるい素数でもその程度には ℓ 進表現のことをわかりたいということである. 分岐から生じる不変量は, よい素数では自明になってしまうので, B のほうは, わるい素数固有の現象を理解したいということである. あとでみるように, こちらは特に微分形式との関わりが重要となる.

2.2 局所体の ℓ 進表現

問題 A の答は, Tate 予想と weight-monodromy 予想を仮定すれば, ある種の跡公式で与えられることが期待できる. このことを説明するため, $G_{\mathbf{Q}_p}$ の ℓ 進表現 $\rho : G_{\mathbf{Q}_p} \to GL(V)$ は, Weil 群の表現 ρ' と巾零自己準同型 N の対によって定まるということを, 簡単に復習する [13].

Weil 群 $W_{\mathbf{Q}_p}$ を $G_{\mathbf{Q}_p}$ の元で $G_{\mathbf{F}_p}$ への像が Fr_p の整数巾であるようなもののなす部分群とする.

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathbf{Q}_p} & \subset & G_{\mathbf{Q}_p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle Fr_p \rangle \quad (= \mathbf{Z}) & \subset & G_{\mathbf{F}_p} \quad (= \hat{\mathbf{Z}}). \end{array}$$

幾何的 FrobeniusFr_p の, Weil 群 $W_{\mathbf{Q}_p}$ へのもちあげ F を 1 つとる. Grothendieck のモノドロミー定理によると, Weil 群 $W_{\mathbf{Q}_p}$ の連続表現 $\rho' : W_{\mathbf{Q}_p} \to GL_{\mathbf{Q}_l}(V)$ と V の巾零自己準同型 N の対で, 等式 $\rho(F^n\sigma) = \rho'(F^n\sigma)\exp(t_\ell(\sigma)N)$ が任意の $n \in \mathbf{Z}, \sigma \in I$ についてなりたつようなものがただ 1 つ定まる. ここで, $t_\ell : I \to I/P \to \mathbf{Z}_\ell$ は, 非標準同型 $I/P \to \hat{\mathbf{Z}}'$ と ℓ 成分への射影 $\hat{\mathbf{Z}}' \to \mathbf{Z}_\ell$ の合成である. また ρ' の核と惰性群 $I \subset W_{\mathbf{Q}_p}$ の共通部分 $\mathrm{Ker}\rho' \cap I$ は I の開部分群である. Weil 群の元 $F^n\sigma \in W_{\mathbf{Q}_p}(n \in \mathbf{Z}, \sigma \in I)$ について, $\mathrm{Tr}\rho(F^n\sigma) = \mathrm{Tr}\rho'(F^n\sigma)$ がなりたつ. Weil 群 $W_{\mathbf{Q}_p}$ は Galois 群 $G_{\mathbf{Q}_p}$ の密な部分群なので, Galois 群 $G_{\mathbf{Q}_p}$ の ℓ 進表現 ρ は, Weil 群 $W_{\mathbf{Q}_p}$ の連続表現 ρ' と V の巾零自己準同型 N によって定まる. したがって, ρ を定めるには, ρ' と N を定めればよい.

$$(W_{\mathbf{Q}_p}\text{の連続表現 } \rho' \ + \ \text{巾零自己準同型 } N) \ \Leftrightarrow \ G_{\mathbf{Q}_p}\text{の } \ell \text{ 進表現 } \rho.$$

2.3 跡公式

Galois 群の ℓ 進表現 $\rho : G_{\mathbf{Q}_p} \to V$ が, 代数多様体 X のエタール・コホモロジー $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_\ell)$ から定まるとき, ρ' と N がそれぞれどうすればわかるか考える. まず ρ' について考える. ここで基礎となるのが, 有名な Tate 予想である. Galois 群の ℓ 進表現 V に対し, それに ℓ 進円分指標の q 乗をテンソル積してえられる表現を $V(q)$ で表わす.

Tate 予想. [14], [15] F を有限体あるいは代数体, より一般には素体上有限生成な体とし, X を射影非特異な F 上の代数多様体, $q \geq 0$ を整数とする. ℓ を F の標数とことなる素数とすると, 絶対 Galois 群 $G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の ℓ 進表現 $V = H^{2q}(X_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_\ell(q))$ について次がなりたつ.

1. 不変部分 V^{G_F} は代数的サイクルで生成される.

2. 一般固有空間 $\{v \in V |$ 任意の $\sigma \in G_F$ に対し $(\sigma - 1)^{\dim V} v = 0\}$ は, 不変部分 V^{G_F} と等しい.

$H^{2q}(X_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_\ell(q))$ の代数的サイクルとは X の余次元 q の部分多様体 Z のサイクル類 $[Z]$ の線型結合のことをいう. 次の場合をのぞくと, Tate 予想が確かめられている例は, 個別的なものしかない.

$\cdot$ X が Abel 多様体で $q = 1$ のとき. [16], [17].

Tate 予想の 2 の部分を半単純性予想という. 半単純性予想から Weil 群 $W_{\mathbf{Q}_p}$ の表現 ρ' は半単純であることがしたがう. 半単純な表現の同型類は跡で決まるから, ρ' を知るには, $\mathrm{Tr}\rho'(F^n\sigma), (n \in \mathbf{Z}, \sigma \in I)$ がわかればよいと考えられる. さらに $n \geq 0$ のときにわかれば実は十分である. Tate 予想からは Künneth 成分への射影が代数的対応で与えられることも従う. ここで, 代数的対応とは $X \times X$ の $n = \dim X$ 次元の部分多様体の ($\mathbf{Q}$ 係数の) 線型結合 Γ のことであり, 代数的対応 Γ はコホモロジー $H^q(X_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_\ell)$ の G_F-同変な自己準同型 Γ^* を定める. Künneth 成分への射影が代数的対応で与えられるとは, 各整数 $q \geq 0$ に対し, 代数的対応 Γ_q で $H^{q'}(X_{\bar{F}}, \mathbf{Q}_\ell)$ の自己準同型 Γ_q^* が $q = q'$ ならば恒等写像で $q \neq q'$ ならば 0 写像となるようなものが存在することをいう.

したがって, ρ' を知るには, 代数的対応 Γ に対して, 交代和

$$\sum_{q=0}^{2\dim X} (-1)^q \mathrm{Tr}(\Gamma^* \circ F^n\sigma : H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_\ell))$$

がわかればよい. この交代和について次のことが期待される.

予想 1. X を p 進体 $\mathbf{Q}_p$ 上の固有非特異代数多様体とし, Γ を X 上の代数的対応とする. F を幾何的 Frobenius のもちあげとし $n \geq 0, \sigma \in I$ とする. このとき, 有限体の代数閉包 $\bar{\mathbf{F}}_p$ 上の射影非特異多様体 W と W 上の代数的対応 Γ' で, 素数 $\ell \neq p$ に対し, 等式

$$\sum_{q=0}^{2\dim X} (-1)^q \mathrm{Tr}(\Gamma^* \circ F^n\sigma : H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)) = (\Gamma', \Delta_W)$$

をみたすものが定まる. 右辺は Γ' と対角 Δ_W の $W \times W$ の中での交点数を表わす.

予想のこころは, 左辺で表わされるような局所体上の代数多様体から定まる ℓ 進表現の数論は, それを p を法として還元してえられる右辺で表わされるような有限体上の多様体の幾何に帰着されるということである. 左辺には Galois 群の元が現れるが, 右辺はそうでない純粋に幾何的なものであることに注意してほしい. 多様体がよい還元をもち $\Gamma = \Delta, n = 1$ のときには, W として $X \bmod p$ をとり Γ' としては Frobenius 自己準同型 $W \to W$ のグラフをとればよい. これが 1.3 ででてきた, Frobenius の作用が合同ゼータで決まるということにあたる. このときも, そこでは略してしまったが, Galois 群 $G_{\mathbf{F}_p}$ の作用を完全に決めるためには, 半単純性予想を仮定しないといけない.

予想 1 からは, 左辺の交代和が ℓ によらないことが従う. 正標数での類似では, $\Gamma = \Delta$ のときこの各項が ℓ によらないことが, 次項で述べる weight-monodromy 予想がなりたつことを使って, 寺杣 [18] で示されている. また p 進 Hodge 理論をつかうと, $\ell = p$ の場合も同様な予想を定式化できる. 予想 1 はオルタレイション [19] をつかって重さスペクトル系列 [20] のまだ証明されていないある性質に帰着されるものと期待される. 多様体 X が準安定モデルをもつときには, W としてはその還元の各既約成分, およびそ

れらの共通部分の無縁 (disjoint) 和をとることになる. 予想 1 は次の場合になりたつことが知られている.

· X がアーベル多様体の場合. [21]

· Γ が対角 Δ の場合. [22]

· σ が暴惰性群 P の元のとき. [23]

· X が久賀-佐藤多様体やその志村曲線上の類似で, Γ がある種の Hecke 対応の場合. [24], [25]

モジュラー曲線上の普遍楕円曲線のファイバー積のコンパクト化を久賀-佐藤多様体とよぶ. この最後の場合の応用として, 楕円保型形式や Hilbert 保型形式にともなう p 進表現の分解群 $G_{\mathbf{Q}_p}$ への制限が, p 進 Hodge 理論の意味で局所 Langlands 対応と両立することが従う.

2.4 weight-monodromy 予想

ρ' は Tate 予想と関係していたが, N のほうは Weil 予想と関係が深い.

定理 (=Weil 予想) [4] X を有限体 $\mathbf{F}_p$ 上の固有非特異多様体とし, $\ell \neq p$ を素数, $q \geq 0$ を整数とする. 幾何的 FrobeniusFr_p の $H^q(X_{\bar{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)$ への作用の固有値は代数的整数で, その共役の複素絶対値はすべて $p^{\frac{q}{2}}$ である.

Weil 予想にでてくる, その共役の複素絶対値がすべて $p^{\frac{q}{2}}$ であるような代数的整数を重さ q の Weil 数とよぶ. Weil 予想は, 1.3 ででてきた多項式 $P_q(t) = \det(1 - Fr_p t : H^q(X_{\bar{\mathbf{F}}_p}, \mathbf{Q}_\ell))$ を $P_q(t) = \prod_i (1 - \alpha_i t)$ と分解したとき, 各 α_i が重さ q の Weil 数であるということである.

局所体上の多様体へ Weil 予想を拡張したものが, weight-monodromy 予想ということになる. 線型空間 V の巾零自己準同型 N に対し, V の部分空間 W_i の増大列で, 次の条件 (1)-(3) をみたすものがただ 1 つ定まる.

(1) 十分大きい i に対し $W_i = V, W_{-i} = 0$.

(2) $NW_i \subset W_{i-2}$.

(3) $i > 0$ に対し N^i がひきおこす線型写像 $N^i : Gr_i^W V = W_i/W_{i-1} \to Gr_{-i}^W V$ は同型.

たとえば $N^2 = 0$ のときは, $W_{-2} = 0, W_{-1} = \mathrm{Im}\ N, W_0 = \mathrm{Ker}\ N, W_1 = V$ である. V が局所体の Galois 群の ℓ 進表現で, N が 2.2 のように定まる V の巾零自己準同型 N のとき, この部分空間の増大列 $W = (W_i)_i$ のことを V のモノドロミー・フィルトレイションという. このとき W_i は部分表現になる.

weight-monodromy 予想 [26] X を p 進体 $\mathbf{Q}_p$ 上の固有非特異多様体とし, $\ell \neq p$ を素数, $q \geq 0$ を整数とする. $F \in W_{\mathbf{Q}_p}$ を幾何的 FrobeniusFr_p のもちあげとし, W を ℓ 進表現 $V = H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)$ のモノドロミー・フィルトレイションとする. このとき F の $Gr_i^W V$ への作用の固有値は重さ $q + i$ の Weil 数である.

weight-monodromy 予想が知られているのは次のような場合である.

· $q \leq 2$ の場合. [20]

· X が久賀-佐藤多様体, またはその志村曲線上の類似のとき. [24], [27], [25]

· 正標数の局所体上の類似. [4], [28]

weight-monodromy 予想は, 重さスペクトル系列 [20] が定める $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)$ のフィルトレイションが, モノドロミー・フィルトレイションと一致すると述べることもできる.

半単純性予想と weight-monodromy 予想を仮定すると, 対 (ρ', N) の同型類は, ρ' の同型類したがって $\mathrm{Tr}\rho'$ だけで決まってしまう. $\mathrm{Tr}\rho'$ は上の予想 1 でわかるはずなので,

ℓ 進表現 $H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)$ はこれら 3 つの予想がなりたてば, 次の図のようにしてわかるものと考えられる.

$$\begin{array}{ccccc} \text{予想 } 1 & \Rightarrow & (\rho', N) & \Rightarrow & \ell \text{ 進表現 } H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_\ell) \text{ の同型類.} \\ (=\text{跡公式}) & \text{半単純性予想+} & & & \\ & \text{weight-monodromy 予想} & & & \end{array}$$

3 分岐理論.

問題 B を扱うのが, 高次元の分岐理論である. 分岐理論に特徴的なことは, Galois 表現と微分形式の結びつきである. Hodge 理論や p 進 Hodge 理論では, はじめから de Rham コホモロジーとの比較同型が理論にくみこまれている. これに対し, $p \neq \ell$ のときは, ℓ 進コホモロジーと de Rham コホモロジーを直接結びつける関手は存在しない. それなのに, ℓ 進コホモロジーの分岐から生じる不変量は, 微分形式や de Rham コホモロジーをつかって表わされることが多い. その典型的なものが, これから紹介する導手公式である.

3.1 導手公式.

局所体の ℓ 進表現の分岐から生じる不変量のうちで最も基本的なものはその導手とよばれるものである. 暴惰性群 $P \subset G_{\mathbf{Q}_p}$ には, 分岐群のフィルトレイションとよばれる正規部分群の減少列 $G^v \subset P, v \in \mathbf{Q}, v > 0$ が定義される [11]. $G_{\mathbf{Q}_p}$ の ℓ 進表現 V に対し, その Swan 導手

$$\mathrm{Sw}V = \sum_{v\in\mathbf{Q}, v>0} v \cdot \dim V^{G^{v+}}/V^{G^v}$$

が定義される. ここで $G^{v+} = \overline{\bigcup_{v'>v} G^{v'}}$ であり, $V^{G^v}, V^{G^{v+}}$ は不変部分を表わす. Swan 導手 $\mathrm{Sw}V$ は 0 以上の整数であり, $\mathrm{Sw}V = 0$ と P の V への作用が自明であることとは同値である.

X を p 進体 $\mathbf{Q}_p$ 上の固有非特異多様体とする. S.Bloch は [29] で, Swan 導手の交代和 $\mathrm{Sw}(X/\mathbf{Q}_p) = \sum_{q=0}^{2\dim X}(-1)^q \mathrm{Sw} H^q(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_\ell)$ が, 次のように幾何的に計算できることを予想した. $X_{\mathbf{Z}_p}$ を X の p 進整数環 $\mathbf{Z}_p$ 上の固有正則モデルとする. $n = \dim X_{\mathbf{Z}_p} = \dim X + 1$ とおく. $X_{\mathbf{Z}_p}$ 上の微分形式の層 $\Omega^1_{X_{\mathbf{Z}_p}/\mathbf{Z}_p}$ の局所化された Chern 類は, 閉ファイバーの 0-サイクル類 $c_n(\Omega^1_{X_{\mathbf{Z}_p}/\mathbf{Z}_p}) \in CH_0(X_{\mathbf{F}_p})$ を定める.

予想 [29](Bloch の導手公式) 上の記号のもとで

$$\chi(X_{\bar{\mathbf{Q}}_p}) - \chi(X_{\bar{\mathbf{F}}_p}) + \mathrm{Sw}(X/\mathbf{Q}_p) = -\deg(-1)^n c_n(\Omega^1_{X_{\mathbf{Z}_p}/\mathbf{Z}_p})$$

がなりたつ. ここで $\chi = \sum_q (-1)^q \dim H^q$ は ℓ 進コホモロジーの Euler 数, deg は 0-サイクルの次数を表わす.

この公式は X が p 進体 $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大のスペクトルのときには, 古典的な導手判別式公式そのものである. E が楕円曲線のときには, Tate-Ogg の式 [30] と同値である [31]. Bloch は [29] で, X が代数曲線のときに公式を証明している. この公式のこころは, X の ℓ 進コホモロジーの分岐から生じる不変量が, 微分形式を使って幾何的に計算できるということである. またこの公式は, Lefschetz 跡公式 $\chi(V_{\bar{F}}) = (\Delta_V, \Delta_V) = (-1)^n \deg c_n(\Omega^1_{V/F})$ の数論的な類似とも考えられる. ただし V は体 F 上の n 次元固有非特異多様体とする.

$\mathbf{Q}$ 上の多様体について, その Hasse-Weil L 関数の関数等式の定数項の符号と, de Rham コホモロジーの Galois 加群としての構造の関係への, 導手公式の応用が [32] で与えられている.

定理 2[23] 閉ファイバーを被約化したもの $X_{\mathbf{F}_p,\mathrm{red}}$ が $X_{\mathbf{Z}_p}$ の正規交叉因子ならば, Bloch の導手公式はなりたつ.

この定理の内容は, $X_{\mathbf{Z}_p}$ の因子 $D = X_{\mathbf{F}_p,\mathrm{red}}$ が強い意味のうめこみ特異点解消をもつならば, Bloch の導手公式はなりたつということである. D が強い意味のうめこみ特異点解消をもつとは, D の非特異部分スキームを中心とする $X_{\mathbf{Z}_p}$ のブロー・アップをくりかえすことにより D を正規交叉因子にできることをいう. 証明にはオルタレイション [19], 局所化された交点理論および log 幾何を用いる. [23] では, Bloch の導手公式は, 代数的対応を含む形にも拡張されている.

3.2 展望

分岐理論の今後の課題として, 次の 3 点をあげておく.

1. 係数層つきの導手公式.
2. ϵ 因子.
3. 不確定特異点をもつ可積分接続との類似.

1. $\mathcal{F}$ を局所体 K 上の非特異な多様体 U 上のスムースな ℓ 進層としたとき, Swan 導手 $\mathrm{Sw}(U,\mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2\dim U}(-1)^q \mathrm{Sw} H^q(U_{\bar{K}},\mathcal{F})$ を分岐理論的に求めよという問題である. $\dim U = 1, \mathrm{rank}\mathcal{F} = 1$ の場合には, 加藤 和也により公式が得られている [33]. さらに [23] で示されている自己同型に対する導手公式を使えば, $\mathrm{rank}\mathcal{F} = 1$ のときには高次元への拡張ができそうである. したがって問題はこの公式を階数が一般の場合へ拡張することである.

階数が 1 のときの公式を観察すると, まずはじめにやるべきことは, 剰余体が関数体であるような離散付値体に対し, その分岐群のフィルトレイションを研究することである. これについては A.Abbés との共同研究により, rigid 幾何の概念をつかってフィルトレイションの定義をすることができた [34]. 藤原 一宏もよく似た方法でフィルトレイションの定義を与えている [35]. われわれの定義も, 彼の定義に示唆されたところが大きい. 分岐群のフィルトレイションの定義はできたが, このフィルトレイションの性質はまだよくわかっていない. 上で述べた, 代数的対応に対する導手公式は, その重要な一歩ではあるが, 層係数付きの導手公式の定式化までには, まだまだなすべきことは多い.

2. 導手よりくわしい不変量に ϵ 因子とよばれるものがある [13]. この不変量は, Hasse-Weil L 関数の関数等式や, 局所 Langlands 対応の定式化に現れるものである. 2 はコホモロジーの ϵ 因子 $\epsilon(U,\mathcal{F}) = \prod_{q=0}^{2\dim U} \epsilon(K, H^q(U_{\bar{K}},\mathcal{F}))^{(-1)^q}$ を求めよという問題である. これについては $\dim U = 1, \mathrm{rank}\mathcal{F} = 1$ のときでさえも, 正確な定式化はなされていない. 関連する研究が安田 [36], 小林 [37] にある

3. 正標数の多様体上の ℓ 進層の暴分岐と, 標数 0 の多様体上の可積分接続の不確定特異点との類似は [38] ですでに指摘されている. K を標数 0 の体 k 上の関数体とし, U を K 上の非特異な多様体 $(\mathcal{E},\nabla)$ を U 上の可積分接続とする. 相対 de Rham コホモロジー $H^q(U, DR_{U/K}(\mathcal{E})) = H^q(U, \mathcal{E}\otimes\Omega^\bullet_{U/K})$ には, Gauss-Manin 接続 $\nabla_{GM} : H^q(U, DR_{U/K}(\mathcal{E})) \to H^q(U, DR_{U/K}(\mathcal{E}))\otimes\Omega^1_{K/k}$ が定まる. これを標数 $p>0$ の体 F 上のスムースな多様体 U 上の $\ell(\neq p)$ 進層 $\mathcal{F}$ のコホモロジーが定める絶対 Galois 群 G_F の表現 $H^q(U_{\bar{F}},\mathcal{F})$ の類似と考える. F が有限体で U が代数曲線のときは, 行列式の交

代積 $\prod_q \det(Fr : H^q(U_{\bar{F}}, \mathcal{F}))^{(-1)^q}$ を, ϵ 因子の積として表わす積公式が知られている [13],[39].

Beilinson-Bloch-Esnault [40] は, U が標数 0 の体 k 上の関数体 K 上の代数曲線のときに, Gauss-Manin 接続の行列式 $\det(R\Gamma(U, DR_{U/K}(\mathcal{E})), \nabla_{GM})$ が定める階数 1 の K 上の可積分接続について研究し, ℓ 進表現の ϵ 因子の積公式とよく似た公式を得た. 可積分接続の不確定特異点と ℓ 進表現の暴分岐の類似は興味深い課題である.

References

[1] 斎藤 毅, 数論幾何におけるガロワ表現, 数学 51(1999) 161-174.

[2] A. Weil, *Number of solutions of equations in finite fields*, Oeuvres [1949b].

[3] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4),* LNM 269, 270, 305, Springer, 1972,1973.

[4] P. Deligne, *La conjecture de Weil I,* Publ. Math. IHES 43 (1974) 273-308, *II,* ibid. 52 (1981) 137-251.

[5] J.-P. Serre, *Facteurs locaux des fonction zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures),* (1970) Oeuvres 87.

[6] P.Deligne, *Formes modulaires et représentations ℓ-adiques*, Séminaire Bourbaki éxp 355 LNM 179 Springer, (1969) 139-172.

[7] A.Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem,* Ann. of Math. 141 (1995) 443-551.

[8] 斎藤 毅, Fermat 予想 1, 岩波書店 (2000).

[9] P.Deligne et al, Cohomologie étale, LNM 569, Springer 1977.

[10] G.Shimura, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton Univ. Press 1971.

[11] J.-P. Serre, Corps locaux, 3rd ed., Hermann Paris, 1968.

[12] J.-M. Fontaine (ed.), Périodes p-adiques, Astérisque 223 (1994).

[13] P.Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L,* in Modular forms of one variable II, LNM 349, Springer, (1973) 501-595.

[14] J. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta functions,* Arith. alg. geom., Harper and Row, New York, (1965) 93-110.

[15] —–, *Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology,* Proc. Symp. in pure Math., AMS, 55 part I (1994) 71-83.

[16] ——, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields,* Inv. Math. 2 (1966) 134-144.

[17] G.Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern,* Inv. Math. 73 (1983), 349-366.

[18] T.Terasoma, *Monodromy weight filtration is independent of l*, preprint.

[19] A. J. de Jong, Families of curves and alterations. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47 (1997), no. 2, 599–621.

[20] M.Rapoport and T.Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimura varietäten, Monodromiefiltrations und verschwindende Zyklen in ungeicher Characteristik,* Inv. Math. 68 (1980) 21-101.

[21] A.Grothendieck, *Modèles de Néron et monodromie,* dans Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA 7 I, LNM 288 Springer, (1972) 313-513.

[22] T.Ochiai, *l-independence of the trace of monodromy,* Math. Ann., 315 (1999), no. 2, 321-340.

[23] K.Kato and T. Saito, *Conductor formula of Bloch,* preprint, University of Tokyo, (2001).

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜t-saito/pp.html bloch.dvi

[24] T. Saito, *Modular forms and p-adic Hodge theory,* Inv. Math. 129 (1997) 607-620.

[25] ——, *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory,* preprint.

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜t-saito/pp.html h.dvi

[26] P. Deligne, *Théorie de Hodge I,* Proc. ICM Nice (1971) Gauthier-Villars, Paris, 425-430.

[27] ——, *Weight-monodromy conjecture for ℓ-adic representations associated to modular forms, A supplement to the paper [S1]*, in B.B.Gordon et al.(eds.), The arithmetic and geometry of algebraic cycles, (2000) 427-431.

[28] T.Ito, *Weight-monodromy conjecture over positive characteristic local fields,* 東京大学修士論文 (2001).

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜itote2/papers/papers.html wmconj.dvi

[29] S.Bloch, *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985, 421–450, Proc. Symp. Pure Math. 46, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[30] A.Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. J. Math. 89 (1967) 1-21.

[31] T.Saito, *Conductor, discriminant, and the Noether formula for arithmetic surfaces,* Duke Math. J. 57 (1988), no. 1, 151–173.

[32] T.Chinburg-G.Pappas-M.Taylor, *ϵ-constants and Arakelov Euler characteristics*, Math. Res. Lett. 7 (2000), no. 4, 433-446.

[33] K.Kato, *Generalized class field theory,* Proc. ICM 90 Kyoto, Springer-Verlag (1991) 419-428.

[34] A.Abbés and T.Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue fields I,* preprint, Univ. of Tokyo, (2000).

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜t-saito/pp.html abbes.dvi

[35] K.Fujiwara, personal communication.

[36] S.Yasuda, *Local constants in torsion rings,* 東京大学博士論文 (2001).

[37] S.Kobayashi, *The local root number of elliptic curves with wild ramification,* 東京大学修士論文 (1999).

http://ms406ss5.ms.u-tokyo.ac.jp/˜koba/mywork.html sepsilon.dvi

[38] P.Deligne, Équations différentielles à points singuliers réguliers. LNM 163, Springer, 1970.

[39] G.Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil,* Publ. Math. IHES 65 (1987) 131-210.

[40] A.Beilinson-S.Bloch-H.Esnault, personal communication.

東京大学数理科学研究科
E-mail:t-saito@ms.u-tokyo.ac.jp