proper 射の謎　斎藤　毅

定義 1 スキームの射 $f\colon X \to Y$ が **proper** であるとは，f が分離かつ有限型であり，さらに任意の射 $Y' \to Y$ に対し，f の底変換 $X \times_Y Y' \to Y'$ が閉写像であることをいう．

これが，EGA の proper 射の定義である．proper 射は，次の定理に典型的に現れるような，有限性と強く結びついた重要な概念である．

定理 2 $f\colon X \to Y$ がネーター・スキームの **proper** 射で，$\mathcal{F}$ が連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層ならば，すべての自然数 $q \geq 0$ に対し，高次順像 $R^q f_* \mathcal{F}$ も連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群層である．

しかし，定義 1 をみただけでそれがどういう意味のものかわかるだろうか．proper 射の合成は proper であり，閉埋め込みは proper であり，射影空間束からの標準射も proper である．したがって，射影多様体は定義体上 proper なことがわかる．でもそれだけだったら，projective な射だけ考えてもよさそうである．Grothendieck は，はじめ **proper** な多様体は射影的なことを示そうとしたらしいが [6]，反例が広中により構成されている [8, Appendix B, Example 3.4.1]．

proper 射の一つの解釈は，コンパクト性の類似というものである．

定義 3 位相空間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が **proper** とは，任意の位相空間 Z に対し，$f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ が閉写像であることをいう．

これは，[2] の定義である．Serre は [10] で，これを Chevalley の射的定義とよび，ブルバキのこの部分の原稿を自分が書いたと書いている．位相空間 X がコンパクト（ブルバキ風には準コンパクト）であるための条件は，一点からなる空間 P への連続写像 $X \to P$ が **proper** なことである．確かに，定義 1 と定義 3 はよく似ている．定義 3 以前には，**proper** 射は [1] で次のように定義されていた．

定義 4 局所コンパクトハウスドルフ空間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が **proper** とは，Y の任意のコンパクト集合 A に対し，逆像 $f^{-1}(A)$ がコンパクトであることをいう．

位相空間の連続写像 $f\colon X \to Y$ に対し，f が定義 3 の意味で **proper** ならば，定義 4 の条件がなりたち，X と Y が局所コンパクトハウスドルフ空間ならば，逆もなりたつ．

定義 3 は Chevalley による次の定義 [5] をなぞったものである．

定義 5 代数多様体の射 $f\colon X \to Y$ が **proper** とは，任意の代数多様体 Z に対し，$f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ が（Zariski 位相に関して）閉写像であることをいう．

Chevalley は [5] で，Y が一点からなる場合に，$X \to Y$ が **proper** であることは X が Weil の意味で完備であることと同値であることなどを示している．

Grothendieck は，代数的集合に対する定理 2 の証明の報告 [7] の中で，代数的集合の射について次のように定義し，それが定義 5 と同値なことを注意している．

定義 6 代数的集合の射 $f\colon X \to Y$ が **proper** とは，X のすべての既約成分 X_i が $\overline{f(X_i)}$ 上完備であることをいう．

整スキームの射 $f\colon X \to Y$ で像 $f(X) \subset Y$ が稠密であるものが完備であるとは，関数体の付値環について proper 性の付値判定法の条件をみたすことであるというのが，[4] の定義である．Grothendieck は [7] で，定義体が複素数体ならば，代数的集合の射が **proper** であることは，それがさだめる連続写像が定義 4 の意味で **proper** であることと同値であることも注意している．Grothendieck は [6] で，[7] の内容について書いているが，proper 射の定義にはふれていない．

定義 4 による **proper** 射の定義が H. Cartan によるものであることは，[9] の前書きに明記されている．Cartan は [3, Théorème 4.2] で，名前をつけることなしに，局所コンパクトハウスドルフ空間の定義 4 の条件をみたす連続写像によるコンパクト台コホモロジーのひきもどしを考察した．Leray は [9] で，**proper** 射を定義するとともに，**proper** 層も定義し，**proper** 射による **proper** 層の安定性を示している．ただし，[9] で定義された層は後に Cartan により整備された現在の意味の層とは多少違ったものである．

proper 射の定義の起源についての謎はだいたい解決したが，**proper** ということばについてはまだ次のような謎が残っている．

・はじめにつかったのは Leray か Cartan か？

・はじめに定義されたのは写像に対してかそれとも層に対してか？

・どういう理由でこのことばが選ばれたのか？

・フランス語の **propre** には，固有という意味のほかに清潔という意味がある．どちらの意味で使われたのか？

謝辞　Luc Illusie 氏に，手助けいただいたことを感謝します．

参考文献

[1] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Topologie générale I, 2^{e} ed. 1951.

[2] —, ibid. 3^{e} ed. 1960.

[3] H. Cartan, *Méthodes modernes en Topologie Algébrique*, Comm. Math. Helv. 18, 1-15 (1945) (Oeuvres, Vol. 3, 1164-1178, 76)

[4] C. Chevalley, *Les schémas*, Séminaire Cartan et Chevalley, 1955/56 Exposés n° 5 1-6 et 6 1-11, 12.12.1955.

[5] ––, *La notion de correspondence propre en géométrie algébrique*, Seminaire Bourbaki (Décembre 1957), SMF.

[6] A. Grothendieck, Lettre à Serre, 1956.7.23, Correspondence Grothendieck-Serre, SMF.

[7] ––, *Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents,* Séminaire Cartan, 1956/57 Exposé n° 2, 1-12, 4.2.1957 et 11.2.1957.

[8] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, GTM Springer.

[9] J. Leray, *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue* (Cours professés au collège de France en 1947-1948 et 1949-1950), Journal de Mathématiques pures et appliquées, **29**, 1950, 1-139. (Oeuvres Scientifiques, Vol. 1, 261-399 [1950a])

[10] J-P. Serre, Lettre à Grothendieck, 1958.10.22, Correspondence Grothendieck-Serre, SMF.