2/1. Lifting theorum

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O}_\lambda)$ ℓ-adic rep'n

$F/\mathbb{Q}$ 総実 Galois 拡大 $\rho|_{G_F}$ modular とする

$\Rightarrow \exists (\rho_\mu)_\mu$ ~~compatible~~ $G_{\mathbb{Q}}$ の表現の compatible system

s.t. $\rho = \rho_\lambda$

pf $1 = \sum_i n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} 1$ (as vertual rep'n (⇔ traceが等しい))

F/F_i 可解, $n_i \in \mathbb{Z}$.

$\rho = \sum n_i \mathrm{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \underline{\rho|_{G_{F_i}}}$

solvable base change より $\rho|_{G_F}$ modular

$\Rightarrow \rho|_{G_{F_i}}$ modular

$\Rightarrow \in$ compatible system の member

$\exists (\rho_{F_i,\mu})_\mu$ comp. system s.t.

$\rho|_{G_{F_i}} = \rho_{F_i,\lambda}$.

$$\rho_\mu = \sum u_i \operatorname{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \rho_{F_i,\mu}$$ virtual rep'n of $G_{\mathbb{Q}}$

$(\rho_\mu, \rho_\mu) = (\rho, \rho) = 1.$ $\Rightarrow$ ρ_μ は既約表現か

または その -1 倍.

$\deg \rho_\mu = \deg \rho = 2 > 0$. より ρ_μ 既約表現.

ρ_μ は $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元表現

F/F' 可解とする $(\rho_\mu|_{G_{F'}})|_{G_F} = \rho_\mu|_{G_F}$ modular, compatible system

solvable b.c $\Rightarrow$ $\rho_\mu|_{G_{F'}}$ modular, 〃

p 素数 $D_p \subset \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ が可解群 F'

D_pに対応する拡大 F'の素点 $\exists v$ で $F'_v \cong \mathbb{Q}_p$

$\Rightarrow$ compatible //.

- Hecke 加群の構成.

$\overline{R} \to T \curvearrowright M \leftarrow$ 有限生成 $\mathcal{O}$ 加群

Tの役割 1. $\overline{R} \to T$

2. $T \curvearrowright M$

1. 保形形式にともなうGalois表現の構成とその大域局所整合性.

/$\mathbb{Q}$, /F : Hilbert modular form

Jaquet-Langlands 対応

$GL_2(F)$ の modular form … Hilbert modular variety

$\updownarrow$

$D^\times$ の 〃 … Shimura curve 1次

D quaternion alg/F. (modular curve とよくにている)

2. J-L-清水対応 D, $D^\times$ の modular 有限個の点.

・$\mathcal{O}[\Delta]$-free … 2では非常にかんたん(位相幾何なし

・1. 現存唯一数論幾何が使われている部分

$[F:\mathbb{Q}]$ 偶数 D/F quaternion alg

すべての有限素点で split $D\otimes F_v \simeq M_2(F_v)$

〃 無限 〃 ramify $D\otimes F_v \simeq \mathbb{H}$

$$(D\otimes \mathbb{A}_F^f)^\times \simeq GL_2(\mathbb{A}_F^f)$$

$\chi : \mathbb{A}_F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ $\chi = N_{F/\mathbb{Q}}^{k-2} \cdot \varepsilon$ finite order

を fix する.

weight k char ε の Hilbert mod. form の空間

$$S_{k,\varepsilon} \hookrightarrow \varinjlim_{\substack{K \subset GL_2(\mathbb{A}_F^f) \\ \text{open cpt subgp}}} \Gamma\Big(\underbrace{GL_2(F)\backslash\big(GL_2(\mathbb{A}_F^f)/K \times X\big)}, \omega^{\otimes k}\Big)^{\varepsilon}_{\text{cusp}}$$

$$X = \prod_{v|\infty} (\mathbb{C}/\mathbb{R})$$

Hilbert mod var $/\mathbb{C}$.

$GL_2(\mathbb{A}_F^f)$ の admissible rep'n $/\mathbb{C}$.

$$S_{k,\varepsilon}^{D} = \varinjlim_{\substack{K \subset (D\otimes\mathbb{A}_F^f)^\times \\ \text{o.c.subgp}}} \Gamma\big(D^\times\backslash(D\otimes\mathbb{A}_F^f)^\times/K, W\big)^{\varepsilon}$$

有限集合

$$W = \bigotimes_{v|\infty} \mathrm{Sym}^{k-2} V_v$$

$(D\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C})^\times$ の表現

$D^\times$

$$(D\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C})^\times = \prod_{v|\infty} GL_2(\mathbb{C}).$$

v成分の自然な表現 : V_v

$S_{k,\varepsilon}^{D}$ $(D\otimes\mathbb{A}_F^f)^\times$ の adm. rep'n $/\mathbb{C}$

J-L 対応 ∃ $S_{k,\varepsilon} \simeq S_{k,\varepsilon}^{D}$

$$\begin{matrix} S_{k,\varepsilon} & \simeq & S^D_{k,\varepsilon} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ GL_2(\mathbb{A}_F^f) & \simeq & (D\otimes\mathbb{A}_F^f)^\times \end{matrix}$$

$K \subset GL_2(\mathbb{A}_F^f)$ o.c. subgp $\quad S_{k,\varepsilon}^{K} \simeq S_{k,\varepsilon}^{D,K}$

$\wr \qquad \wr$

$K^D \subset (D\otimes\mathbb{A}_F^f)^\times \quad T(K) \simeq T(K^D)$ 加群の同型

$S_{k,\varepsilon}^{D,K}$: $\mathbb{C}$-線形空間を修正して

有限生成 $\mathbb{Q}$ 加群にする.

↑

K-fixed part.

有限次元.

$$S_{k,\varepsilon}^{D,K} = \{ f : (D \times \mathbb{A}_F^f)^\times \to W \mid f(gtzk) = \rho(g)\chi(z)f(t) \}$$

$\rho : D^\times \to GL(W)$ $\left(\begin{array}{l} g \in D^\times,\ t \in (D \otimes \mathbb{A}_F^f)^\times \\ z \in \mathbb{A}_F^{f\times} \subset (D \otimes \mathbb{A}_F^f)^\times \\ k \in K. \end{array} \right)$

これの E_λ 構造は定義できるが, $\mathcal{O}_\lambda$ は無理

…少し修正.

$f \in S_{k,\varepsilon}^{D,K}$ のかわりに f_1 を $f_1(t) = \rho(t_\ell)^{-1}f(t)$

t の ℓ-part

$(D \otimes \mathbb{A}_F^f)^\times \to (D \otimes \mathcal{O}_\ell)^\times$

$t \mapsto t_\ell$

より一般に, 代数的量指標にともなう λ 進表現

$\chi : \bigoplus_{v \notin S} \mathbb{Z} \to E^\times$ $\quad \chi_{alg} : F^\times \to E^\times$

alg な準同形

F, E : 代数体, S : F の素点の有限集合 $S_\infty \subset S$.

組

s.t. $a \in F^\times$, $a \gg 0$ (totally positive
= すべての実素点で >0)

かつ $a \equiv 1 \mod {}^\exists N > 0$:

($v | N \Rightarrow v \in S$)

$$\Rightarrow \chi((a)) = \chi_{alg}(a)$$

例 $F = \mathbb{Q} = E$, $S = \{\infty\}$, $p \mapsto p$. $\chi_{alg} = \mathrm{id}$.

$N = 1$.

・∞で考えると $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$ の $(E \otimes \mathbb{R})^\times$ 値の指標.

・有限素点 $v | \ell$: G_F^{ab} の ℓ進指標.

$\chi_{alg} = 1$ なら類体論そのもの

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Coker} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Coker} & & \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{v \notin S} \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{A}_F^\times / K \times (F \otimes \mathbb{R})^\times_{>0} \arrow[u] \arrow[r] & \bigoplus_{v | S,\ v<\infty} F_v^\times / K_v \times \bigoplus_{v\,\text{実}} F_v^\times / F_{v>0}^\times & \\
 & & K \cap \text{open cpt } (\mathbb{A}_F^f)^\times \ N\text{に対応} & & \\
0 \arrow[r] & \{a \in F^\times \mid a \gg 0, \equiv 1 (N)\} \arrow[uu] \arrow[r, hook] & F^\times \arrow[uu] \arrow[uur, "\text{近似定理}"] & &
\end{tikzcd}$$

$$(E\otimes\mathbb{R})^\times$$
$$\uparrow \chi\cdot\chi_{alg}^{-1}$$
$$\otimes\mathbb{Z}\times(F\otimes\mathbb{R})^\times \qquad \text{によって指標が誘導される}$$
$$\uparrow \text{diagonal}$$
$$\{-\}$$

$$\mathbb{A}_F^\times \to (F\otimes\mathbb{R})^\times \xrightarrow{\chi_{alg,\infty}} (E\otimes\mathbb{R})^\times$$

$$\chi\cdot\chi_{alg,\infty}^{-1} : \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to (E\otimes\mathbb{R})^\times \quad \text{が誘導.}$$

$$\mathbb{A}_F^\times \to (F\otimes\mathbb{Q}_\ell)^\times \xrightarrow{\chi_{alg,\ell}} (E\otimes\mathbb{Q}_\ell)^\times$$

$$\chi\cdot\chi_{alg,\ell}^{-1} : \mathbb{A}_F^\times/F^\times\cdot(F\otimes\mathbb{R})^\times_{>0} \to (E\otimes\mathbb{Q}_\ell)^\times$$
$$\| \leftarrow \text{類体論.}$$
$$G_F^{ab}$$

$$k_\ell \subset K_\ell = \prod_{v|\ell} GL(1$$

$$f_1(gtzk) = \rho(\cancel{g}\, t_\ell z_\ell k_\ell)^{-1} f(gtzk)$$
$$\| $$
$$\cancel{\rho(g)}\, \chi(z) f(t)$$

$$= \chi(z)\rho(z_\ell)\rho(k_\ell)\rho(t_\ell)^{-1} f(t)$$

$$= \chi(z)\rho(z_\ell)^{-1} \rho(k_\ell)^{-1} \cdots$$
$$f_1(t).$$

$$S_{k,\varepsilon}^{D,K\,\prime} = \{ f : (D\otimes\mathbb{A}_F^f)^\times \to W \mid f_1(gtzk) = \underbrace{\chi(z)\rho(z_\ell)^{-1}}_{\psi(z)}\rho(k_\ell)^{-1} f_1(t)$$
$$\psi : \mathbb{A}_F^{f\times} \to E_\lambda^\times$$

W : E_λ 線形空間 $\supset W_\mathcal{O}$ $\mathcal{O}$-lattice

K_ℓ-stable

をとることで

$S^{D,K}_{k,\Sigma}$ の $\mathcal{O}$-lattice が定義される

$T(K)_\mathcal{O}$-module 有限生成.

… これの局所化として T, M を定義

$D^\times \backslash (D\otimes \mathbb{A}_F^f)^\times / K\cdot \mathbb{A}_F^\times$ 有限集合

$= \{\bar t_1, \dots, \bar t_n\}$

$t \in (D\otimes \mathbb{A}_F^f)^\times$, $tzk \sim t$ $tzk = \gamma t$ $\gamma \in D^\times$

$H(t) = (t^{-1}D^\times t \cap K\mathbb{A}_F^\times)/F^\times$

有限アーベル群

$$S^{D,K}_{k,\Sigma,\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^{n} W^{H(t_i)}$$

W 直和因子 のために 補助的な制限のない素点をとったため

$H(t_i)$ の位数が ℓ と素 $\leftarrow S \supset \Sigma_p$

$\Downarrow$

$\mathcal{O}[\Delta]$-free.