1/18

$$\bar{L}[[X]] \twoheadrightarrow \bar{R}^{\square}_{\infty} \twoheadrightarrow T_{\infty}$$

$$\uparrow \qquad \nearrow \text{単射}$$

$$\mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]]$$

$\bar{L}$ が整域かつ $\dim \bar{L}[[X]] = \dim \mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]]$

$$\Rightarrow \bar{R}^{\square}_{\infty} \simeq T_\infty$$

$$\dim \bar{L}[[X]] = 3\#\Sigma_p + [F:\mathbb{Q}] + \dim \mathrm{Sel}_{S_n} + \sum_{v\in\Sigma_p} \dim \underbrace{H^0(G_v, \mathrm{ad})}_{(-,\mathrm{ad}^0)+1} - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad})$$

$\vee\!/$

$$\dim \mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]] = \# Q + 4\#\Sigma_p - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad})$$

$S_n = Q_n \amalg S$ $\quad$ $\# Q_n$ が一定

$$\boxed{[F:\mathbb{Q}] + \dim \mathrm{Sel}_{S_n} + \sum_{v\in\Sigma_p} \dim H^0(G_v, \mathrm{ad}^0) \geq \# Q}$$

$R^{\square}$ の大きさの上からの評価 $\qquad$ $=$ になってほしい.

両辺の差 $= ?$

$$\mathrm{Sel}_{S_n} = \ker\left(H^1(G_{S_n}, \mathrm{ad}^0) \to \bigoplus_{v\in\Sigma_p} H^1(G_v, \mathrm{ad}^0)\right).$$

— 一般に Selmer 群

$G_S \curvearrowright M$ 有限 G_S 加群 $\qquad \mathcal{L} = (L_v)_v$

各 $v \in S \cup \{v|\infty\}$ に対し, $L_v \subset H^1(G_v, M)$ (local condition)

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(M) = \ker\left(H^1(G_S, M) \to \bigoplus_{v \in S} H^1(G_v, M)/L_v\right)$$

(Sel_{S_n} については $S_n \supset \Sigma_p$ に入っているかどうかで L_v を決めている)

双対 Sel 群 $M^*(1) = \mathrm{Hom}(M, \underset{\text{1の巾根}}{\mu_{p^\infty}})$

$\mathcal{L}^* = (L_v^{\perp})_v$

local Tate duality

$$\begin{array}{ccccc} H^1(G_v, M) & \times & H^1(G_v, M^*(1)) & \to & H^2(G_v, \mu_{p^\infty}) \\ \cup & & \cup & & \cong \downarrow \mathrm{inv} \\ L_v & & L_v^{\perp} & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

perfect pairing　　annihilator

$\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}^*}(M^*(1))$; 双対 Selmer群.

$M = \mathrm{ad}^0$.　$M^*(1) = \mathrm{ad}^0(1)$

$$\mathrm{Sel}_{S_n}^* = \ker\left(H^1(G_{S_n}, \mathrm{ad}^0(1)) \to \bigoplus_{v \in S_n \setminus \Sigma_p} H^1(G_v, \mathrm{ad}^0(1))\right)$$

$$\mathrm{Sel}_{S^*} = \ker\left(H^1(G_S, \mathrm{ad}^0(1)) \to \bigoplus_{v \in S \setminus \Sigma_p} H^1(G_v, \mathrm{ad}^0(1))\right),$$

とすると

$$\mathrm{Sel}_{S_n^*} = \ker\left(\mathrm{Sel}_{S^*} \to \bigoplus_{v \in Q_n} H^1(G_v, \mathrm{ad}^0(1))\right).$$

Wilesの'公式'.

$$\dim \mathrm{Sel}_{S_n} - \dim \mathrm{Sel}_{S_n^*} = \sum_{v \in S_n \cup S_\infty} \left(\dim L_v - \dim H^0(G_v, \mathrm{ad}^0) \right)$$

↑ 無限素点

$$+ \dim H^0(G_S, \mathrm{ad}^0) - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad}^0(1))$$

global term

$H^0(G_S, \mathrm{ad}^0) = 0$. ∵ $\bar{\rho} : G_S \to GL_2(\bar{\mathbb{F}})$ 絶対既約

$H^0(G_S, \mathrm{ad}^0(1)) = 0$ $\quad \bar{\rho}|_{F(\zeta_\ell)}$ も 〃

local term

$v \in \Sigma_p \quad L_v = 0$.

$v \mid \infty \quad p \neq 2$. $L_v = H^1(G_v, \mathrm{ad}^0) = 0$. G_v は位数2.

$H^0(G_v, \mathrm{ad}^0)$ $\quad \underline{\text{odd}} \to \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(Fは総実.) $\quad V_{\mathbb{F}} \quad \mathrm{ad}^0$

$\dim H^0 = 1$.

$[F:\mathbb{Q}]$

$v \in S \setminus \Sigma_p \quad L_v = H^1(G_v, \mathrm{ad}^0) \qquad \Sigma_p \supset \{v \mid p\}$

$v \nmid \ell = p$.

$\dim L_v - \dim H^0(G_v, \mathrm{ad}^0)$

$= \dim H^2(G_v, \mathrm{ad}^0)$

↑ localなGal coh の Euler数の公式.

$= \dim H^0(G_v, \mathrm{ad}^0(1))$

↑ local Tate duality

vでは不分岐　Fr_v の固有値 α_v, β_v とすると

$$\frac{\alpha_v}{\beta_v},\ \frac{\beta_v}{\alpha_v},\ 1 \not\equiv q_v = N_v \mod \ell .$$

$$V_{\bar{F}} : \begin{pmatrix} \alpha_v & 0 \\ 0 & \beta_v \end{pmatrix} \qquad ad^0 \begin{pmatrix} \alpha_v/\beta_v & & \\ & \beta_v/\alpha_v & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$ad^0(1) \begin{pmatrix} \alpha_v/\beta_v \, q_v & & \\ & \frac{\beta_v}{\alpha_v} q_v & \\ & & q_v \end{pmatrix}$$ どれも $\not\equiv 1\ (\ell)$

$$\Rightarrow H^0 = 0 .$$

$v \in Q_n$ 　　$\cdots = \dim H^0(G_v, ad^0(1))$ までは $v \in S \setminus \Sigma_p$ と同じ.

$\alpha_v \not\equiv \beta_v$, $q_v \equiv 1 \mod \ell^n$ をみたす.

上と同様に $\Rightarrow$ 　$\dim H^0 = 1$.

よって, $\dim Sel_{S_n} - \dim Sel_{S_n}^*$

$$= -\sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(G_v, ad^0) - [F:\mathbb{Q}] + \# Q$$

の 左辺 − 右辺 $= \dim Sel_{S_n}^*$

≥ 0 は dim だから解釈できる.

$= 0 \iff Sel_{S_n}^* = 0$.

$\iff$ 下の射が単射.

$$\mathrm{Sel}_{S_n^*} = \ker\left(\mathrm{Sel}_{S^*} \to \bigoplus_{v\in Q_n} H^1_f(G_v, \mathrm{ad}^0(1))\right)$$

$$0 \to H^1(G_S, \mathrm{ad}^0(1)) \to H^1(G_{S_n}, \mathrm{ad}^0(1)) \to \bigoplus_{v\in Q_n} H^1(G_v, \mathrm{ad}^0(1)) / H^1_f(G_v, \mathrm{ad}^0(1))$$

$$G_{S_n} \twoheadrightarrow G_S$$

exact.

$$H^1_f(G_v, \mathrm{ad}^0(1)) = \ker\left(H^1(G_v, \mathrm{ad}^0(1)) \to H^1(I_v, \mathrm{ad}^0(1))\right)$$

$$= H^1(G_{k(v)}, \mathrm{ad}^0(1)).$$

$I_v = \ker G_v \to G_{k(v)}$

$$\dim H^1_f = \dim H^0(G_{k(v)}, \mathrm{ad}^0(1)) = 1.$$

Q_nのとり方：$\alpha_v \neq \beta_v$. $q_v \equiv 1 \bmod \ell^n$ $(v\in Q_n)$

をみたす有限素点 $v\notin S$ の有限集合で

$\# Q_n = \dim \mathrm{Sel}_{S^*}$ で

$\mathrm{Sel}_{S_n^*} \to \bigoplus_{v\in Q_n} H^1_f(G_v, \mathrm{ad}^0(1))$ が同形となるように

とる.

とれる：Chebotarev density

(Taylor-Wilesのもとの証明と同じ) 省略.

$$\mathcal{O}[[\Delta_\infty]] \to R_\infty$$

$$\downarrow$$

$\mathcal{O}[[\Delta_n]] \to R_n$ の定義.

$\Delta_n = \prod_{v \in Q_n} \Delta_v$, Δ_v $K(v)^\times$ の ℓ 巾部分

↑ 位数 ℓ 巾の巡回群

位数 ℓ^n でわりきれる.

$(q_v \equiv 1 \ (\ell^n))$.

$v \in Q_n$ 核は pro-ℓ

$$
\begin{tikzcd}
G_v \arrow[r] \arrow[d] & G_{S_n} \arrow[r] \arrow[d] & GL(V_{R_n}) \arrow[d] \\
G_{K(v)} \arrow[r] & G_S \arrow[r] & GL(V_R) \arrow[d] \\
\mathrm{Fr}_v \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[rr, bend right, mapsto] & & GL(V_{\mathbb{F}}) = GL_2(\mathbb{F})
\end{tikzcd}
$$

固有値 $\alpha_v \neq \beta_v$

V_{R_n} : universal deformation free R_n-mod. rk 2

$$
\begin{tikzcd}
 & & G_v \arrow[r] \arrow[d] & GL(V_{R_n}) & \\
1 \arrow[r] & I_{\text{pro-}\ell} \arrow[r] & \text{商}G \arrow[r] \arrow[ur] & G_{K(v)} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{Z}_\ell(1) \cong I_{\text{pro-}\ell}$

↑ inertia I_v の pro-ℓ quotient

さらに G^{ab} を経由する.

Fr_v の V_R への作用は対角化可能

V_R の適当な基底をとって $\mathrm{Fr}_v \sim \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v & 0 \\ 0 & \tilde{\beta}_v \end{pmatrix}$

$F \in G$ Fr_v のもちあげ. V_{R_n} の中 $F \sim \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{\alpha}}_v & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde{\beta}}_v \end{pmatrix}$

$\sigma \in I_{v,\ell}$ の generator とすると

$F\sigma F^{-1} = \sigma^{q_v} = \sigma \cdot \underbrace{\sigma^{q_v - 1}}$ $\qquad q_v \equiv 1 \bmod \ell^n$

逐次近似 $\Downarrow$ $\qquad \sigma = 1 + (\quad)$

$F\sigma F^{-1} = \sigma$

$\Downarrow$

σ も対角行列.

$I_{v,\ell} = \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow \kappa(v)^\times$ の ℓ 巾部分 $= \Delta_v$

への制限は これを経由.

左上の成分 $\quad \Delta_v \to R_n^\times$

の積 $\quad \Delta_n \to R_n^\times \rightsquigarrow \mathcal{O}[\Delta_n] \to R_n$.

Δ_n が惰性群への制限だから

$R_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R \quad \left(\Rightarrow \begin{array}{c} \bar{R}_\infty \simeq T_\infty \\ \Downarrow \\ \bar{R} \simeq T \end{array} \right)$

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(E_\lambda)$ modular ?

$F/\mathbb{Q}$ 有限次可解 総実

$\rho|_{G_F} : G_F \to GL_2(E_\lambda)$ が modular $\Rightarrow$ ρ modular

automorphic rep'n.

E/F 総実代数体の素数次巡回拡大.

$\left(GL_2(\mathbb{A}_F) \text{ の保型表現} \right) \overset{1:1}{\underset{\text{base change}}{\longrightarrow}} \left(GL_2(\mathbb{A}_E) \text{ の 〃 で } Gal(E/F) \text{ 不変} \right)$

$\updownarrow$

$G_F \supset G_E$.

・ $v \nmid p \Rightarrow \underbrace{\rho|_{I_v}}_{v\text{での惰性群への制限}}$ は unipotent と仮定できる

局所体の絶対Gal群は可解. $G_{k(v)} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$

$I_v/P_v \simeq \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1)$

P_v ← pro-p群

・ $v \mid p$ $\rho|_{G_v}$ が potentially Barsotti-Tate の場合を

(有限次拡大のGal群に制限すると) ← potentially

p-divisible gp が定める

p進表現である.

~~$\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$が~~

potentially (—) をはずすことができる (Kisin).

楕円曲線の modularity BCDT $p=3$ で wild ramification
pot. B-T.

Lifting Theorem (来週以降)

Taylor の potential modularity

$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$ $\mathbb{F}$ 有限体

連続 絶対既約 odd.

$\Rightarrow$ $F/\mathbb{Q}$ 有限次総実 Galois 拡大 ... $\bar{\rho}(G_{\mathbb{Q}}) = \bar{\rho}(G_F)$ を課すこともできる
s.t. $\bar{\rho}|_{G_F}$ は modular

Cor ℓ-adic version (MLT で使えば).

除元例, (3, 5)-trick.

$$
\begin{array}{ccc}
X(5) & \leftarrow & X(5,3) \\
\uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \quad \Gamma_0 . \\
\text{genus } 0 & & \left(\begin{array}{l}\text{full} \\ \text{genus } 22\end{array}\right. .
\end{array}
$$

ていせい?

$\uparrow$ 有理点 たくさん

$\uparrow$ 有理点 有限コ