数理科学I　演習問題2

問題 1 D を $(0,0), (\pi, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi)$ を頂点とする3角形とする．重積分

$$\int_D \cos\frac{2x-y}{3}dxdy$$

を，変数変換 $x = 2s+t, y = s+2t$ を使って求めよ.

問題 2 D を不等式 $\dfrac{1}{27}x^2 \leq y \leq x^2,\quad \dfrac{1}{8}y^2 \leq x \leq y^2,\quad x \geq y$ で定まる xy 平面の部分とする．$u = \dfrac{x^2}{y}, v = \dfrac{y^2}{x}$ で定まる対応の逆対応による変数変換を使って D の面積を求めよ. 重積分

$$\int_D xydxdy$$

も求めよ.

問題 3 C_1, C_2, C_3 をそれぞれつぎのように定まる始点 $P = (1,0)$, 終点 $Q = (0,1)$ の曲線とする.

C_1　線分 PQ.

C_2　3角形 OPQ の2辺.

C_3　原点 O を中心とする半径1の円のうち第1象限に含まれる部分.

D_1 を3角形 OPQ とし，D_2 を原点 O を中心とする半径1の円の内部のうち第1象限に含まれる部分とする.

(1) C_1, C_2, C_3 のパラメータ表示を与え，それぞれについて、線積分

$$\int_{C_i}(x^2-y)dx + xydy$$

を求めよ.

(2) D_1, D_2 それぞれについて、重積分

$$\int_{D_i}\left(-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) + \frac{\partial}{\partial x}(xy)\right)dxdy$$

を求めよ.

(3)

$$\int_{D_1}\left(-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) + \frac{\partial}{\partial x}(xy)\right)dxdy = \int_{C_1}(x^2-y)dx + xydy - \int_{C_2}(x^2-y)dx + xydy,$$

$$\int_{D_2}\left(-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) + \frac{\partial}{\partial x}(xy)\right)dxdy = \int_{C_3}(x^2-y)dx + xydy - \int_{C_2}(x^2-y)dx + xydy,$$

がなりたつことを確かめよ.

略解. **1** E を st 平面内の $(0,0),(\frac{\pi}{2},0),(0,\frac{\pi}{2})$ を頂点とする 3 角形とする．変数変換 $x=2s+t, y=s+2t$ により，E の点は D の点に 1 対 1 に対応する．$J(s,t)=\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=3$ だから，変数変換公式より

$$\int_D \cos\frac{2x-y}{3}dxdy = 3\int_E \cos s ds dt$$

右辺

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}-t}\cos s ds)dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}-t}dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt = 3.$$

2 逆対応は $x=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}, y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$ で与えられる．これにより，D の点は $E: 1\le u\le 27, 1\le v\le 8, u\ge v$ の点と 1 対 1 に対応する．ヤコビアンは

$$J(s,t)=\det\begin{pmatrix}\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}}\\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}.$$

変数変換公式より

$$\int_D dxdy = \frac{1}{3}\int_E dudv = \frac{1}{3}(26\cdot 7 - \frac{1}{2}7\cdot 7) = \frac{105}{2}.$$

$$\int_D xydxdy = \frac{1}{3}\int_E uvdudv = \frac{1}{3}\int_1^8(\int_v^{27}udu)vdv = \frac{1}{6}\int_1^8(729v - v^3)dv$$

$$=\frac{1}{6}(\frac{729\cdot 63}{2}-\frac{4095}{4}) = \frac{29253}{8}.$$

3 (1)

$$C_1: x=1-t, y=t \quad (0\le t\le 1).$$

$$C_2: x=-t, y=0 \quad (-1\le t\le 0), \quad x=0, y=t \quad (0\le t\le 1).$$

$$C_3: x=\cos t, y=\sin t \quad (0\le t\le \frac{\pi}{2}).$$

$$\int_{C_1}(x^2-y)dx + xydy = \int_0^1(-((1-t)^2-t)+(1-t)t)dt = -B(1,3)+B(2,1)+B(2,2)$$

$$=-\frac{2}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

$$\int_{C_2}(x^2-y)dx+xydy=\int_0^1 -(1-t)^2dt=-B(1,3)=-\frac{1}{3}.$$

$$\int_{C_3}(x^2-y)dx+xydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((\cos^2 t-\sin t)(-\sin t)+\cos t\sin t\cos t)dt=\frac{1}{2}B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\pi.$$

(2)

$$\int_{D_1}\left(-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)+\frac{\partial}{\partial x}(xy)\right)dxdy=\int_{D_1}1+ydxdy=\frac{1}{2}+\int_0^1 y(1-y)dy$$

$$=\frac{1}{2}+B(2,2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

$$\int_{D_2}\left(-\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)+\frac{\partial}{\partial x}(xy)\right)dxdy=\int_{D_2}1+ydxdy=\frac{\pi}{4}+\int_0^1 r^2dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}.$$

(3)

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3}),\quad \frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\pi-(-\frac{1}{3}).$$