

2026 年度 数理科学概論 期末試験問題 文科

7 月 23 日 (木) 1 限 8:40-10:10 (90 分) 斎藤 毅

- ・氏名と学生証番号を必ず記入してください。
- ・解答用紙冊子 4 ページと計算用紙 1 枚。
- ・筆記用具と計時機能のみの時計以外もちこめません。
- ・問題 n は解答用紙の n ページめに解答してください。
(この指示に気づかず解答してしまったときは、書き直さなくてもだいじょうぶです。)
- ・解答には、途中の計算などもくわしく書いてください。

問題 1 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = x^2 + 4x - xy^2$$

で定める。

1. 偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ。
2. グラフ $z = f(x, y)$ の点 $(1, 2, f(1, 2))$ での接平面を求めよ。
3. $f(x, y)$ が極値をとるための必要条件をみたす点を求めよ。
4. 2 階偏導関数 $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ を求めよ。
5. $f(x, y)$ が極値をとる点と峠点となる点をすべて求めよ。

問題 2 2 変数関数 $f(x, y)$, $h(x, y)$ を

$$f(x, y) = 3x^3 - 5x - y^2, \quad h(x, y) = xy$$

で定める。

1. 勾配ベクトル $\text{grad } f(-1, \sqrt{2})$ を求めよ。
2. ラグランジュの未定係数法を適用して、条件 $f(x, y) = 0$ のもとで関数 $h(x, y)$ が極値をとりうる点をすべて求めよ。
(ほかの方法でもできますが、ラグランジュの未定係数法を必ず使ってください。)
3. 1 変数関数 $g(x) = 3x^5 - 5x^3$ の増減表を求めよ。
4. 小問 2 で求めた点で条件つき極値をとるかどうか判定せよ。

問題 3 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ とする。積分

$$\int_D xy^3 \, dx dy$$

を求めよ。

問題 4 1. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^7}{n^8}$ を求めよ。

2. 2 変数関数 $f(x, y)$ と 1 変数関数 $x = p(t)$, $y = q(t)$ は 2 回連続微分可能であるとする。合成関数 $g(t) = f(p(t), q(t))$ の 2 階導関数 $g''(t)$ を、 $f(x, y)$ の 2 階までの偏導関数と $p(t), q(t)$ の 2 階までの導関数を使って表せ。

- 1
- $f_x(x, y) = 2x + 4 - y^2$, $f_y(x, y) = -2xy$.
 - $f_x(1, 2) = 2$, $f_y(1, 2) = -4$. $f(1, 2) = 1$ だから, 接平面は $z = 2(x - 1) - 4(y - 2) + 1 = 2x - 4y + 7$.
 - $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ より $2x + 4 - y^2 = -2xy = 0$ だから, 極値をとりうる点は $(x, y) = (0, \pm 2)$, $(-2, 0)$.
 - $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = -2y$, $f_{yy}(x, y) = -2x$.
 - $f_{xx}(0, \pm 2)f_{yy}(0, \pm 2) - f_{xy}(0, \pm 2)^2 = 2 \cdot 0 - (\mp 4)^2 < 0$ だから $(0, \pm 2)$ は峠点.
 $f_{xx}(-2, 0)f_{yy}(-2, 0) - f_{xy}(-2, 0)^2 = 2 \cdot 4 - 0^2 > 0$ だから $(x, y) = (-2, 0)$ で $f(x, y)$ は極小値 -4 をとる.

2

- $f_x(-1, \sqrt{2}) = 4$, $f_y(-1, \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ だから $\text{grad } f(-1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2. $f_x(x, y) = 9x^2 - 5$, $f_y(x, y) = -2y$, $h_x(x, y) = y$, $h_y(x, y) = x$ だから, ラグランジュの未定係数法より, 条件つき極値をとりうる点は $9x^3 - 5x = -2y^2$ をみたとす.

$f(x, y) = 0$ より $y^2 = 3x^3 - 5x$ だから, $15x^3 - 15x = 0$. よって $x = 0, \pm 1$.

$x = 0$ のとき $y = 0$, $x = 1$ のとき $3 - 5 < 0$ だから不適, $x = -1$ のとき $y = \pm\sqrt{2}$.

よって求める点は $(0, 0)$, $(-1, \pm\sqrt{2})$ の3点.

3. $g'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1)$ の符号は

$x < -1$ で+, $-1 < x < 1$ で $x = 0$ をのぞき-, $x > 1$ で+.

したがって $g(x)$ は

$x \leq -1$ で増加, $-1 \leq x \leq 1$ で減少, $x \geq 1$ で増加,

4. $(x, y) = (0, 0)$ の近くでは, 第2象限では $xy < 0$, 第3象限では $xy > 0$ なので, $(x, y) = (0, 0)$ で条件つき極値をとらない.

3より, $(xy)^2 = x^2(3x^3 - 5x) = 3x^5 - 5x^3$ は $x = -1$ で極大値をとるから,

$(-1, \sqrt{2})$ では条件つき極大値をとり, $(-1, -\sqrt{2})$ では条件つき極小値をとる.

3

$$\begin{aligned} \int_D xy^3 dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy^3 dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy^3 dy \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{(4-x^2)^2 - (1-x^2)^2}{4} dx + \int_1^2 x \cdot \frac{(4-x^2)^2}{4} dx \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{15-6x^2}{4} dx + \int_1^2 x \cdot (4-2x^2 + \frac{x^4}{4}) dx = \frac{15}{8} - \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{2} - \frac{15}{2} + \frac{63}{24} = \frac{21}{8}. \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} \int_D xy^3 dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy^3 dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xy^3 dx \\ &= \int_0^1 y^3 \cdot \frac{(4-y^2) - (1-y^2)}{2} dy + \int_1^2 y^3 \cdot \frac{4-y^2}{2} dy \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{15}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{6} = \frac{1}{8}(3 + 60 - 42) = \frac{21}{8}. \end{aligned}$$

4

- 区分求積法より $\int_0^1 x^7 dx = \frac{1}{8}$.

2. $g'(t) = f_x(p(t), q(t))p'(t) + f_y(p(t), q(t))q'(t)$ だから,

$$\begin{aligned} g''(t) &= f_{xx}(p(t), q(t))p'(t)^2 + 2f_{xy}(p(t), q(t))p'(t)q'(t) + f_{yy}(p(t), q(t))q'(t)^2 \\ &\quad + f_x(p(t), q(t))p''(t) + f_y(p(t), q(t))q''(t). \end{aligned}$$