2024年度 数理科学概論 期末試験問題　文科

7月18日（木）1限 8:40-10:10 (90分)　　斎藤 毅

・氏名と学生証番号を必ず記入してください．
・解答用紙と計算用紙各１枚．
・筆記用具と計時機能のみの時計以外もちこめません．
・解答には，途中の計算などもくわしく書いてください．

問題１　2変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

で定める．

1. 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．
2. 偏微分係数 $f_x(2,1)$, $f_y(2,1)$ を求め，グラフ $z=f(x,y)$ の点 $(2,1,f(2,1))$ での接平面を求めよ．
3. 合成関数 $g(t)=f(2t,t)$ の導関数 $g'(t)$ を求め，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で $g(t)$ の増減を調べよ．
4. $f(x,y)$ が極値をとるための必要条件をみたす点を求めよ．
5. 2階偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．
6. $f(x,y)$ が極値をとる点と峠点となる点をすべて求めよ．

問題２　$a>1$ を実数とする．2変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ を

$$f(x,y) = x^2-y^2,\ g(x,y) = (x-a)^2+y^2$$

で定める

1. 勾配ベクトル $\operatorname{grad} f(2,1)$ を求めよ．
2. ラグランジュの未定係数法を使って，条件 $f(x,y)=1$, $x>0$ のもとで関数 $g(x,y)$ が極値をとりうる点を求めよ．
3. 条件 $f(x,y)=1$ のもとで関数 $g(x,y)$ が最小値をとる点が2つ存在するための a についての条件を求めよ．

問題３　$D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\}$ とする．積分

$$\int_D xy\ dxdy$$

を求めよ．

問題４　関数 $\dfrac{\sin x}{x}$ の $0<x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲での増減を調べよ．

1　1. $f_x(x,y) = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - 2\cdot 2x = 4x(x^2+y^2-1)$,
$f_y(x,y) = 2(x^2+y^2)\cdot 2y + 2\cdot 2y = 4y(x^2+y^2+1)$.
2. $f_x(2,1) = 32,\ f_y(2,1) = 24.\ f(2,1) = 19$ だから，接平面は
$z = 32(x-2) + 24(y-1) + 19 = 32x + 24y - 69$.
3. 1. より $g'(t) = 8t(5t^2-1)\cdot 2 + 4t(5t^2+1) = 100t^3 - 12t$.
$0 \leqq t \leqq \sqrt{3}/5$ で減少，$\sqrt{3}/5 \leqq t \leqq 1$ で増加.
4. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ より $x(x^2+y^2-1) = y(x^2+y^2+1) = 0$ だから，
極値をとりうる点は $(x,y) = (0,0),\ (\pm 1, 0)$.
5. $f_{xx}(x,y) = 4(x^2+y^2-1+2x^2) = 4(3x^2+y^2-1),\ f_{xy}(x,y) = 8xy,\ f_{yy}(x,y) = 4(x^2+3y^2+1)$.
6. $f_{xx}(0,0) = -4,\ f_{xy}(0,0) = 0,\ f_{yy}(0,0) = 4$ だから $(0,0)$ は峠点.
$f_{xx}(\pm1,0) = 8,\ f_{xy}(\pm1,0) = 0,\ f_{yy}(\pm1,0) = 8$ だから $(\pm1,0)$ で $f(x,y)$ は極小値をとる.

2　1. $f_x(2,1) = 4,\ f_y(2,1) = -2$ だから $\operatorname{grad} f(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
2. $f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = -2y,\ g_x(x,y) = 2(x-a),\ g_y(x,y) = 2y$ だから，
ラグランジュの未定係数法より，条件つき極値をとりうる点は
$x = -(x-a)$ または $y = 0$ をみたす.
よって，$(1,0)$ と $(a/2, \pm\sqrt{a^2/4-1})$ （ただし $a \geqq 2$ のとき）.
3. $1 < a \leqq 2$ のときは，最小値は $(1,0)$ での $(a-1)^2$.
$a \geqq 2$ のときは，最小値は $(a/2, \pm\sqrt{a^2/4-1})$ での $a^2/4 + a^2/4 - 1 = a^2/2 - 1$.
よって求める条件は $a > 2$.

3

$$\int_D xy\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{8}.$$

4　$\sin' x = \cos x$ だから $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}$.
$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ では，初回の講義で説明したとおり
$x = \dfrac{1}{2}\cdot 2x < \dfrac{1}{2}\cdot 2\tan x = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ だから，分子は < 0.
よって $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少.