例題 1　$(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x \geqq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$ とする．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

とおくと，$(x,\, y) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ であることを示せ．

解答例　$y^2 \leqq x^2 + y^2$ だから，$-1 \leqq \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1$ である．よって $\theta = \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ より，$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$ であり，$y = r\sin\theta$ である．

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから，$\cos\theta \geqq 0$ である．$x \geqq 0$, $x^2 = r^2 - y^2 = r^2(1 - \sin^2\theta) = r^2\cos^2\theta$ より，$x = r\cos\theta$ である．

例題 2　$-1 \leqq x \leqq 1$ とする．$\arcsin\sqrt{1-x^2}$ を $\arcsin x$ で表せ．

解答例　$t = \arcsin x$ とおく．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$x = \sin t$ だから $\sqrt{1-x^2} = \cos t = \sin(\dfrac{\pi}{2} - t)$ である．

よって，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{\pi}{2} - t = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ であり，
$-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq 0$ ならば $\pi - (\dfrac{\pi}{2} - t) = t + \dfrac{\pi}{2} = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ である．

したがって $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x & 0 \leqq x \leqq 1, \\ \arcsin x + \dfrac{\pi}{2} & -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases}$ である．

例題 3　微分方程式 $y^2 + y'^2 = 1$ の，初期条件 $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす解 $y = f(x)$ を求めよ．$f(x) = 1$ をみたす最小の $x > 0$ も求めよ．

解答例　$|y| < 1$ とすると，$y' = \pm\sqrt{1-y^2}$ だから，$\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \pm 1.$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

だから $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$. よって $\displaystyle\int \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} dx = \arcsin y = \pm x + C.$

$x = 0$ とおけば $C = \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. 求める解は $f(x) = \sin(\pm x + \dfrac{\pi}{3})$.

$f'(x) = \cos(\pm x + \dfrac{\pi}{3})$ だから $f(x)^2 + f'(x)^2 = 1$ はみたされている．

$f(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{3})$ のときは，$f(x) = 1$ をみたす最小の $x > 0$ は $\dfrac{\pi}{6}$.

$f(x) = \sin(-x + \dfrac{\pi}{3})$ のときは，$f(x) = 1$ をみたす最小の $x > 0$ は $\dfrac{11\pi}{6}$.

問題 1　$(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $y > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする．

$$(x,\, y) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta),$$

をみたす $0 < \theta < \pi$ を arctan を使って表せ．

問題 2　$-1 \leqq x \leqq 1$ とする．$\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ を $\arcsin x$ で表せ．

問題 3　微分方程式 $y' - y^2 = 1$ の，初期条件 $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ をみたす解 $y = f(x)$ を求めよ．

解 $y = f(x)$ が定義される開区間で 0 を含むもののうち最大のものも求めよ．

問題 1 の解答例　$\varphi = \arctan\dfrac{x}{y}$ とおくと $\dfrac{x}{y} = \tan\varphi$ だから $x = y\tan\varphi$ である．$-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\varphi > 0$ だから，$x^2 + y^2 = y^2(\tan^2\varphi + 1) = \dfrac{y^2}{\cos^2\varphi}$ より $y = r\cos\varphi$ であり，$x = y\tan\varphi = r\cos\varphi\tan\varphi = r\sin\varphi$ である．

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{x}{y}$ とおけば $0 < \theta < \pi$ であり，$(x,\, y) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ である．

問題 2 の解答例　$t = \arcsin x$ とおく．$-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$x = \sin t$ だから $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ である．よって $2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin t\cos t = \sin 2t$ である．

よって，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq 2t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $2t = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ であり，

$\dfrac{\pi}{2} \leqq 2t \leqq \pi$ ならば $\pi - 2t = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ であり，

$\pi \leqq 2t \leqq -\dfrac{\pi}{2}$ ならば $-\pi - 2t = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ である．

したがって $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \begin{cases} \pi - 2\arcsin x & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq 1, \\ 2\arcsin x & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ -\pi - 2\arcsin x & -1 \leqq x \leqq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ である．

問題 3 の解答例　$y' = 1 + y^2$ だから，$\dfrac{y'}{1+y^2} = 1.$

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

だから $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$. よって $\displaystyle\int \frac{y'}{1+y^2}dx = \arctan y = x + C.$

$x = 0$ とおけば $C = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$. 求める解は $f(x) = \tan(x + \dfrac{\pi}{6})$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x + \frac{\pi}{6})}$ であり $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$ だから，$y - y'^2 = 1$ はみたされている．

$\displaystyle\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$ だから，解 $f(x)$ が定義される最大の開区間は $(-\dfrac{2\pi}{3},\, \dfrac{\pi}{3})$.