$f_n(x)$ が $f(x)$ に収束し，導関数 $f_n'(x)$ が連続関数 $g(x)$ に一様収束すれば，$f(x)$ は微分可能で，$f'(x) = g(x)$ である．つまり，このとき，$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ がなりたつ．

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n(x)dx$$

の極限 $\lim_{n\to\infty}$ をとると，

$$f(x) - f(a) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(x)dx = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^x g(x)dx$$

両辺を微分すれば，$f'(x) = g(x)$.

巾級数のとき：$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ の収束半径を r とし，$-r < x < r$ に対し，$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ とおく．このとき，$\sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1}$ と $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の収束半径も r で，$-r < x < r$ に対し，

$$f'(x) = \sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1},$$

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

がなりたつ．

応用：$(1+x)^a$, $\mathrm{Arcsin}\, x$ の巾級数展開．a が自然数 n のときは，${}_nC_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ を $\binom{n}{k}$ と書けば，

$$(1+x)^n = 1 + x + \frac{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + x^n$$

である．a が自然数でないときも，$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$ とおく．