第 1 問　逆 3 角関数 Arctan x について，次の問いに答えよ.

(1)　Arctan $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を求めよ.

(2)　Arctan x の巾級数展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を求めよ.

(3)　自然数 n に対し，$s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{3}^k}$ とおく．不等式

$$\left| \mathrm{Arctan}\ \frac{1}{\sqrt{3}} - s_{27} \right| \leq \frac{1}{10^8}$$

がなりたつことを示せ.

第 2 問　次の極限を求めよ.

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$$

第 3 問　関数 $\tan x$ について次の問いに答えよ.

(1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - (ax + bx^3)}{x^3} = 0$$

をみたす実数 a, b を求めよ.

(2)　(1) で求めた実数 a, b について，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - (ax + bx^3)}{x^5}$$

を求めよ.

第 4 問　$x > 0$ に対し，$f(x) = e^x, t(x) = \dfrac{1}{x} \log \dfrac{e^x - 1}{x}$ とおく.

(1)　$x > 0$ に対し，$t = t(x)$ は，$f(x) = f(0) + f'(tx)x$ をみたすただ 1 つの実数であることを示せ.

(2)　$x > 0$ に対し，$0 < t(x) < 1$ であることを示せ.

略解 **1**　(1)　$\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$.

(2)　$\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ だから，$\mathrm{Arctan}\ x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(3)
$$\left|\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}} - s_{27}\right| = \left|\sum_{k=14}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\frac{1}{\sqrt{3}^{2k+1}}\right|$$
$$\leq \frac{1}{29}\frac{1}{3^{14}\sqrt{3}} = \frac{1}{29\cdot 2187^2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{10^8}.$$

2　(1) 区分求積法より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 \log(1+x)dx = [(1+x)\log(1+x) - x]_0^1 \\ &= 2\log 2 - 1.\end{aligned}$$

(2) (1) の両辺の指数関数をとって，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)} = \frac{4}{e}$$

左辺の $\sqrt[n]{\ }$ の中身は $\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n^n}$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{4}{e}$.

3　(1)　$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \cdots$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots$ だから，

$$\begin{aligned}\tan x &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots)(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \cdots) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots .\end{aligned}$$

よって，$a = 1, b = \dfrac{1}{3}$.

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - (x + \frac{1}{3}x^3)}{x^5} = \frac{2}{15}.$$

4　(1)　$\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x} = e^{tx}$ を解けばよい.

(2)　平均値の定理より明らか.