6/4 講義予定

収束半径の計算 ([1] p.192, [2] II p.133,)

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ (あるいは $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = l$) が存在すれば、$r = \dfrac{1}{l}, (l \neq 0)$, $r = \infty, (l = 0)$。

[証明] $|x| < 1/l$ とすると、$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1$. よって $a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$, $x > 1/l$ なら、$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| > 1$ だから、$|a_n x^n| \to \infty (n \to \infty)$。

例

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の微積分。([1] p.193, [2] II p.134-136, [3] p.233-242.)

定理　r を巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とする。このとき、次がなりたつ。

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ の収束半径も r である。

2. $-r < x < r$ に対し、関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定めると、$f(x)$ は $-r < x < r$ で微分可能であり、

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

がなりたつ。

例

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots, \\
\mathrm{Arctan} x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots.
\end{aligned}$$

[証明] 1．r' を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ の収束半径とする．

(1) $|x| < r$ なら，$na_n x^{n-1} \to 0 (n \to \infty)$ であることと，

(2) $|x| < r'$ なら，$a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$ であること

をいえば十分である．(2) を示す．$|x| < r'$ なら，$a_n x^{n-1} \to 0 (n \to \infty)$ だから，$a_n x^n \to 0 (n \to \infty)$ である．(1) を示す．$|x| < t < r$ なら，$n \geq N$ なら $|a_n t^n| < 1$ がなりたつ N があり、

$$|na_n x^{n-1}| \leq n(\frac{|x|}{t})^{n-1} t \to 0 \ (n \to \infty)$$

2．$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ とおく。

連続。$|x|, |a| \leq s < t < r$ とする。$n \geq N$ なら $|a_n| t^n \leq 1$ となるように N をとる．$n \geq N$ とすると、

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| s^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| t^k \left(\frac{s}{t}\right)^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^k = \left(\frac{s}{t}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{s}{t}} (= \varepsilon_n \text{とおく}) \end{aligned}$$

がなりたつ。$x = a$ についても同様。よって

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f(a) - f_n(a)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(a)| + 2\varepsilon_n \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| \leq 2\varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

証明のポイントは、不等式

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n$$

が x によらずになりたつこと。これがなりたっているとき関数列 $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束するという。

[巾級数の微積分の定理の 2 の別証明]

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(a)| &= |\sum_n a_n(x^n-a^n)| \leq \sum_n |a_n||x^n-a^n| \\
&= |x-a|\sum_n |a_n||x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}| \\
&\leq |x-a|\sum_n n|a_n|t^{n-1} \to 0 \quad (x\to a)
\end{aligned}
$$

微分可能。$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ とおく。$|x|,|a|\leq t<r$ とする。

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)=\sum_n a_n\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}-na^{n-1}\right) \\
=\ &\sum_n a_n((x^{n-1}-a^{n-1})+(x^{n-2}a-a^{n-1})+\cdots+(xa^{n-2}-a^{n-1})) \\
=\ &(x-a)\sum_n a_n((x^{n-2}+\cdots+a^{n-2})+(x^{n-3}a+\cdots+a^{n-2})+\cdots+a^{n-2})
\end{aligned}
$$

だから、

$$
\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-g(a)\right| \leq |x-a|\sum_n \frac{n(n-1)}{2}|a_n|t^{n-2} \to 0 \quad (x\to a)
$$