5/14 講義予定

Taylor の定理 ([1] p.40 定理 11, [2] p.83-84, [3] p.132 定理 3.14)

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) &+ f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots \\ &+ f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

をみたす t が a と x の間にある。

証明　$x \geq a$ の場合を考える。

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \right)$$

とおく。$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0, F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ だから、平均値の定理の一般化を繰り返し適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} &= \frac{F'(x_1)}{(n+1)(x_1-a)^n} = \frac{F^{(2)}(x_2)}{(n+1)n(x_2-a)^{n-2}} = \cdots \\ &= \frac{F^{(n)}(x_n)}{(n+1)!(x_n-a)} = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

をみたす $x \geq x_1 \geq x_2 \cdots x_{n+1} = t \geq a$ がある。

最後に行く前に $x \to a$ の極限をとると

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

が得られる。$n+1$ を n とおき直すと、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \right)}{(x-a)^n} = 0$$

例

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right)}{x^4} = 0$$

これを

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = o(x^4)$$

とも表す。

Taylor の公式の解釈。

$f(x)$：真の値

$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$：近似値

$f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$：誤差

例

$$e-\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{e^t}{(n+1)!}\leq\frac{e}{(n+1)!}.$$

復習

$$\begin{aligned} e-\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \\ < \quad \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-1/(n+2)} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

積分型の剰余項 ([2] p.85)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+\int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a)-[(x-t)f'(t)]_a^x+\int_a^x (x-t)f''(t)dt \\ &= f(a)+(x-a)f'(a)-[\frac{(x-t)^2}{2}f^{(2)}(t)]_a^x+\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t)dt \\ & \cdots \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} \\ &\quad +\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt \end{aligned}$$