**4/23** 講義予定

逆三角関数:([1] p.12-15,p.28-29, [2] p.35-37, p.58-59, [3] p.87, p.115, p.167-170.)

$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ を開区間とよび、$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a \le x \le b\}$ を開区間とよぶ。各 $a \le x \le b$ に対し, 実数 $y$ をただ 1 つ定める規則を閉区間 $[a,b]$ で定義された関数とよぶ。

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された狭義単調増加な連続関数とし、$c = f(a), d = f(b)$ とおく。このとき、$[c,d]$ 上定義された狭義単調増加な連続関数 $g(x)$ で、任意の $x \in [c,d], y \in [a,b]$ に対し、$y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ をみたすものが定まる。これを $f$ の逆関数とよぶ。

$f(x)$ が微分可能なら、$g(x)$ も微分可能で $g'(x) = 1/f'(g(x))$ がなりたつ。

[$g$ の連続性の証明] 来週。

$f(x) = e^x, (a,b) = \mathbf{R}$ のとき $(c,d) = (0,\infty)$, $g(x) = \log x$.

$f(x) = \sin x, [a,b] = [-\pi/2, \pi/2]$ のとき、$[c,d] = [-1,1]$, $g(x) = \mathrm{Arcsin}x$.

$\mathrm{Arcsin}x$ は奇関数。

$$\mathrm{Arcsin}0 = 0, \mathrm{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \mathrm{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{3}, \mathrm{Arcsin}1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathrm{Arcsin}'x = \frac{1}{\sin'(\mathrm{Arcsin}x)} = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

いいかえ。原点を中心とする半径が 1 の円上の点 $A(0,1)$ と $P(x, \sqrt{1-x^2})$ を結ぶ弧の長さ。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsin}'x &= \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\right)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx \\
&= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx
\end{aligned}$$

$f(x) = \tan x, (a,b) = (-\pi/2, \pi/2)$ のとき、$(c,d) = \mathbf{R}$, $g(x) = \mathrm{Arctan}x$.

$\mathrm{Arctan}x$ は奇関数。

$$\mathrm{Arctan}0 = 0, \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \mathrm{Arctan}1 = \frac{\pi}{4}, \mathrm{Arctan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{Arctan}x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathrm{Arctan}'x = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan}x)} = \cos^2(\mathrm{Arctan}x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\lim_{x \to \infty} x(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}x) = \lim_{y \to \frac{\pi}{2}-0} \tan y(\frac{\pi}{2} - y) = \lim_{z \to 0+0} \frac{\cos z}{\sin z} z = 1.$$

いいかえ。$A$ を点 $(0,1)$、$P$ を点 $(x,1)$、原点 $O$ を中心とする半径が 1 の円と直線 $OP$ との交点を $Q$ としたときの弧 $AQ$ の長さ。

$Q$ の座標は $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}' x &= \int_0^x \sqrt{\left(\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} dx \\
&= = \int_0^x \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}^3}\right)^2 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}^3}\right)^2} dx \\
&= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx
\end{aligned}
$$