2007年度第4学期 代数と幾何 追試験問題

7月23日 (水) 13:30-15:30 (120分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　両面2枚、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意： 答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい.

問題1　$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とおき，$V = M_2(\mathbb{R})$ の自己準同形 f を $f(X) = AXB$ で定める.

(1)　$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で生成される f 安定部分空間の次元を求めよ.

(2)　f の最小多項式を求めよ.

(3)　f の固有値をすべて求め，その重複度も求めよ.

(4)　f のジョルダン標準形を求めよ.

問題2　$V = \mathbb{R}^4, W = \mathbb{R}^3$ とし，$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$ とおく．V^* を V の双対空間とし，線形写像 $F: V^* \to W$ を $F(f) = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{pmatrix}$ で定める．V の標準基底の双対基底を $f_1, f_2, f_3, f_4 \in V^*$ とし，e_1, e_2, e_3 を W の標準基底とする.

(1)　線形写像 $F: V^* \to W$ の，基底 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in V^*$ と $e_1, e_2, e_3 \in W$ に関する行列表示を求めよ.

(2)　F の核 $\mathrm{Ker}\ F$ の基底を1つ求め，f_1, f_2, f_3, f_4 の線形結合として表わせ.

(3)　商空間 $V^*/\mathrm{Ker}\ F$ の基底で，F によってひきおこされる写像 $V^*/\mathrm{Ker}\ F \to W$ による像が e_1, e_2, e_3 であるものを求め，それを f_1, f_2, f_3, f_4 の線形結合の類として表わせ.

問題3　$A \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$V = M_2(\mathbb{R})$ の双線形形式 $b_A: V \times V \to \mathbb{R}$ を，$b_A(X, Y) = \mathrm{Tr}(XAY)$ で定める.

(1)　b_A が対称形式であるための，A についての条件を求めよ.

1　(1) $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し，$f((x\ y)) = (Ay\ Ax)$ である．よって，$f(E_{11}) = (0\ Ae_1), f^2(E_{11}) = (A^2e_1\ 0), f^3(E_{11}) = (0\ A^3e_1)$ である．$e_1, A^2e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底であり，A は可逆だから，Ae_1, A^3e_1 も $\mathbb{R}^2$ の基底である．よって，$V = \langle E_{11}, f(E_{11}), f^2(E_{11}), f^3(E_{11}) \rangle$ であり，次元は 4 である．

(2)　$A^4e_1 = (2A^2 - 1)e_1$ だから，V の基底 $E_{11}, f(E_{11}), f^2(E_{11}), f^3(E_{11})$ に関する f の行列表示は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．これは，多項式 $X^4 - 2X^2 + 1$ の同伴行列だから，最小多項式も $X^4 - 2X^2 + 1$ である．

(3)　固有値は最小多項式 $X^4 - 2X^2 + 1 = (X-1)^2(X+1)^2$ の根だから，± 1 であり，重複度はどちらも 2 である．

(4)　最小多項式が $X^4 - 2X^2 + 1 = (X-1)^2(X+1)^2$ だから，ジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

2 (1) $F(f_1) = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_1(b) \\ f_1(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．同様に，$F(f_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F(f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(f_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから，求める行列表示 A は $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ である．

(2)　$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから，$f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ は $\mathrm{Ker}\ F$ の基底である．

(3)　$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから，$\overline{f_1}, \overline{f_1 + f_2}, \overline{f_1 + f_2 + f_3}$ は，条件をみたす $V^*/\mathrm{Ker}\ F$ の基底である．

3　(1)　b_A が対称形式であるための条件は，任意の $X, Y \in V$ に対し $\mathrm{Tr}(XAY) = \mathrm{Tr}(YAX)$ ということである．$\mathrm{Tr}(YAX) = \mathrm{Tr}(XYA)$ だから，任意の $X, Y \in V$ に対し $\mathrm{Tr}(X(AY - YA)) = 0$ ということである．A が単位行列のとき b_A は非退化だから，これは任意の $Y \in V$ に対し $AY - YA = 0$ ということである．これは，A がスカラー行列ということである．