2005 年度　第 4 学期　代数と幾何　期末試験問題

3 月 6 日 (月) 10:00-12:00 (120 分)　斎藤　毅

・問題用紙　１枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚
・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：　答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由をできる限りくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」ということばは使わずに，説明してください.

第 1 問　$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とする．$V = \mathbb{R}^4$ の自己準同型 $f : V \to V$ を，$f(x) = Ax$ で定める．次の問いに答えよ.

(1)　A の固有多項式を求めよ.

(2)　A の固有値をすべて求めよ.

(3)　A のすべての固有値 a に対し，一般固有空間 $\widetilde{V}_a \subset V$ の基底を，1 つ与えよ.

(4)　$\mathbb{R}^4$ の基底で，それに関する f の行列表示が A の Jordan 標準形を与えるものを，1 つ求めよ.

(5)　A の最小多項式を求めよ.

第 2 問　$V = \mathbb{R}^5$ の標準基底を e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 とする．W を V の部分空間 $\langle e_1 - e_2, e_3 + e_4, e_3 + e_5 \rangle$ とし，$p : V \to V/W$ を標準全射とする.

(1)　商空間 V/W の基底を，1 つ与えよ.

(2)　標準基底 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 の双対基底を，$e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^* \in V^*$ とする．(1) で求めた V/W の基底の双対基底の，双対写像 $p^* : (V/W)^* \to V^*$ による像を，$e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*$ の 1 次結合として表わせ.

第 3 問　$b : V \times V \to \mathbb{R}$ を，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が定める，$V = \mathbb{R}^2$ 上の非退化対称双線型形式とする.

(1)　V の部分空間 W で，$W^\perp = W$ をみたすものを，すべて求めよ.

(2)　双線型形式 b が定める線型写像 $V \otimes V \to \mathbb{R}$ の，核の基底を 1 つ求めよ.

第 4 問　多項式 $f \in \mathbb{R}[T]$ に対し，写像 $F_f : \mathbb{R} \to GL_3(\mathbb{R})$ を，$F_f(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & f(t) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で定める．F_f が群の準同型となる多項式 f を，すべて求めよ．ただし，$\mathbb{R}$ は，加法に関して群と考える.

略解 **1**　(1)

$$\begin{aligned}\det(X-A) &= \det\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix} = X\det\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix} \\ &= X^2\det\begin{pmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = X^2(X^2-1)\end{aligned}$$

(2)　$0, 1, -1$.

(3)　$\widetilde{V}_0$ の基底 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．$\widetilde{V}_1$ の基底 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$．$\widetilde{V}_{-1}$ の基底 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4)　上の (3) で求めた基底をならべればよい．

(5)　A の最小多項式は，$X(X^2-1)$ でわりきれ，$X^2(X^2-1)$ をわりきる．A の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから，$A(A^2-1) \neq 0$ である．よって，最小多項式は $X^2(X^2-1)$.

2　(1)　$\overline{e_1}, \overline{e_3}$.

(2)　$p^*(\overline{e_1}^*) = e_1^* + e_2^*, p^*(\overline{e_3}^*) = e_3^* - e_4^* - e_5^*$.

3　(1)　$\dim W^\perp + \dim W = \dim V = 2$ だから，$W^\perp = W$ なら $\dim W = 1$ であり，さらに $W = \mathbb{R}x$ なら，$b(x,x) = 0$ である．$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると，$b(x,x) = x_1^2 - x_2^2$ である．よって，$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$W = \mathbb{R}y$ と $W = \mathbb{R}z$ の 2 つである．

(2)　$y \otimes y, z \otimes z, y \otimes z - z \otimes y$.

4　$s, t \in \mathbb{R}$ に対し，$\begin{pmatrix} 1 & s+t & f(s)+f(t)+st \\ 0 & 1 & s+t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s & f(s) \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & f(t) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから，F_f が群の準同型であるための条件は，任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対し，$f(s+t) = f(s)+f(t)+st$ がなりたつことである．よって，F_f が群の準同型なら，$f'(t) = t + f'(0)$ かつ $f(0) = 0$ だから，$f = \dfrac{T^2}{2} + cT$ (c は任意の実数) である．

逆に $\dfrac{(s+t)^2}{2} + c(s+t) = \left(\dfrac{s^2}{2} + cs\right) + \left(\dfrac{t^2}{2} + ct\right) + st$ だから，$f = \dfrac{T^2}{2} + cT$ ならば，F_f は群の準同型である．