問題 1. 次の文のうち写像を定めているものはどれかを判定し、その理由も記述せよ。

(1) 正の実数 $y > 0$ に対し、実数 x で $y = e^x$ を満たすものを対応させる。
(2) 実数 a に対し、$b^2 = a$ を満たす実数 b を対応させる。
(3) 実数 x に対し、$xy = 1$ を満たす実数 y を対応させる。

写像となるものについては、その写像を定義域や値域の集合を使って $f : X \to Y$ のように表し、元の対応も記号 $\mapsto$ を使って表せ。

写像とならないものについては、定義域あるいは値域をうまく変更すれば写像と考えられるので、その変更の仕方を１つ与えよ。

問題 3. X と Y を集合とし、 $Y^X = \{f : f$ は X から Y への写像 $\}$ とおく。

(1) $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ のとき, 自然な全単射 $Y^n \to Y^X$ を定義せよ.
(2) $Y = \{0, 1\}$ のとき, $f \mapsto f^{-1}(0)$ は全単射 $Y^X \to \{A | A \subset X\}$ を定めることを示せ.
(3) X, Y がともに有限集合とし、元の個数をそれぞれ m, n とすると、Y^X も有限集合で元の個数は n^m となることを示せ。

問題 4. 写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A について、条件

$f^{-1}(f(A)) = A$ がなりたつ。

を考える。

(1) 上の条件が X の任意の部分集合 A に対してなりたつためには, f が単射であることが必要十分であることを示せ。
(2) $X = Y = \mathbb{R}$ として、上の条件をみたさないような f と A の例を一つ挙げよ。

問題 5*. $\mathbb{R}$ から閉区間 $[0, 1]$ への全単射 $\mathbb{R} \to [0, 1]$ を１つ与えよ.

問題 6*. $\mathbb{C}$ で複素数体を表すものとする。$f \in \mathbb{C}[X]$ を複素数係数の１変数多項式として、同じ記号 f で、写像 $z \mapsto f(z)$ を表すものとする。このとき $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が、全射となるための条件、単射となるための条件をそれぞれ求めよ。ただし $\mathbb{C}$ が代数閉体であることは使ってよい。

集合と位相 演習 問題略解 (1997.10.14)

1. (1) は写像 $\log : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定める．元の対応は $y \mapsto \log y$.

(2) は写像でない．定義域と値域を { 正の実数 } に制限すれば, 写像 $a \mapsto \sqrt{a}$ を定める．

(3) も写像でない．定義域を { 0でない実数 } に制限すれば, 写像 $x \mapsto x^{-1}$ を定める．

3.(1) $(y_1, \cdots, y_n) \in Y^n$ に対し, 写像 $i \mapsto y_i$ を対応させる．

(2) $A \subset X$ に対し写像 $f_A : X \to \{0,1\}$ を $x \in A$ なら $f_A(x) = 1$, $x \in A^c$ なら $f_A(x) = 0$ と定義する．すると写像 $P(X) \to Y^X : A \mapsto f_A$ は問題の写像 $f \mapsto f^{-1}(1)$ の逆写像を与えることが確かめられる．

(3) X の各元に対し, その像の選び方はそれぞれ n 通りあるから全部で n^m 通り．

4. (1) 必要なこと．条件が X の任意の部分集合 A に対してなりたつと仮定して, f が単射であることを示す．$x, x' \in X$ で $f(x) = f(x')$ と仮定する．$A = \{x\}$ とおくと, $x' \in f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$ だから $x' = x$.

十分なこと．f が単射であることを仮定して X の部分集合 A に対して $f^{-1}(f(A)) = A$ を示す．$f^{-1}(f(A)) \supset A$ は一般に成り立つから $f^{-1}(f(A)) \subset A$ を示せばよい．$x \in f^{-1}(f(A))$ とすると $x' \in A$ で $f(x) = f(x')$ となるものがある．f は単射だから, $x = x'$ で $x \in A$. よって $f^{-1}(f(A)) \subset A$ が示された。

(2) $f(x) = x^2, A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

5*. まず連続な単調増加写像 $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ で $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ となるものをとる．例えば $f(x) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}$. $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ を $g(x) = f(x), x \notin \mathbb{N}, g(0) = 0, g(1) = 1, g(n) = f(n-2) (n = 2, 3, 4, \cdots)$ と定めればこれは全単射.

6*. 全射となるためには f が定数でないことが必要十分．単射となるためには, f が 1 次式であることが必要十分.

1028

集合と位相 演習 問題 (1997.10.28)

問題 1. 集合 $\mathbb{R}$ に同値関係を

$$s \sim t \text{ とは、} \frac{s-t}{2\pi} \in \mathbb{Z} \text{ であること}$$

によって定める．$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ とおくと写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$ は，全単射 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ をひきおこすことを示せ．

問題 2. $P = P(\mathbb{N})$ を自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ のべき集合 $\{X$ は $\mathbb{N}$ の部分集合 $\}$ とする。P 上の同値関係 $\sim$ を

$$X \sim Y \text{ とは全単射 } X \to Y \text{ が存在すること．}$$

によって定義する．この同値関係 $\sim$ に関する完全代表系を *1* つ与えよ．

問題 3. n を自然数とする。$X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ に同値関係を

$$x \sim y \text{ とは } \lambda x = y \text{ を満たす } 0 \text{ でない実数 } \lambda \in \mathbb{R}, \neq 0 \text{ が存在すること}$$

と定義する。この同値関係 $\sim$ による X の商集合のことを n 次元実射影空間とよび $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ で表す。

(1) $0 \le i \le n$ に対し $U_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ を $V_i = \{x = (x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i \neq 0\} \subset X$ の像と定義すると、$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$ であることを示せ。

(2) $0 \le i \le n$ とする。$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に $(x_1, \cdots, x_i, 1, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in X$ の $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ での像を対応させる写像 $j_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ は全単射であることを示せ。

(3) 写像 $X \to \{\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次元部分空間 $\} : x \mapsto \mathbb{R}x$ は全単射 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \{\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次元部分空間 $\}$ をひきおこすことを示せ．

問題 4. $n > 0$ を自然数とする．$\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\equiv \bmod n$ を $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$x \equiv y \bmod n \text{ とは } x - y \text{ が } n \text{ で割り切れること}$$

とおくことにより定める．この同値関係による商集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で表す．$m \in \mathbb{Z}$ のこの同値関係による同値類を $m \bmod n$ で表す．

(1) 同値関係 $\equiv \bmod n$ に関する完全代表系を 1 つ求めよ．

(2) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $m \mapsto \frac{m(m-1)}{2} \bmod 2$ とおいて定める．自然数 $n > 0$ に対し，$p_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を標準全射とする．このとき $f = g \circ p_n$ を満たす写像 $g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が存在するような最小の自然数 $n > 0$ を求めよ．

問題 5. V を実数を係数とする 1 変数多項式全体のなす集合 $\mathbb{R}[X]$ とする．$n > 0$ を自然数とする．V 上の同値関係 $\equiv$ を，$f \equiv g$ とは差 $f - g$ が X^n で割り切れることと定義する．$E = V/\equiv$ を商集合とする．

(1) V の $\mathbb{R}$ 線形空間としての構造は，商集合 E に $\mathbb{R}$ 線形空間の構造をひきおこすことを示せ．

(2) E の $\mathbb{R}$ 線形空間としての次元を求めよ．

集合と位相 演習 問題略解 (1997.10.28)

1. $P=(x,y)\in S^1$ とし, 原点 O と P を結ぶ半直線と, x 軸の正の部分とがなす角を t とすると, $(x,y)=(\cos t,\sin t)$ だから、写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : t\mapsto(\cos t,\sin t)$ の像は S^1 である。また $s,t\in\mathbb{R}$ に対し $(\cos s,\sin s)=(\cos t,\sin t)$ と $s=t+2\pi n (n\in\mathbb{Z})$ は同値だから、写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : t\mapsto(\cos t,\sin t)$ の標準分解は $\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\sim\to S^1\to\mathbb{R}^2$ となる。

2. $\{\emptyset,\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\cdots,\mathbb{N}\}=\{\{i\in\mathbb{N}|i<n\}|n\in\mathbb{N}\}\cup\{\mathbb{N}\}$.

3.

(1) $X=\bigcup_{i=0}^{n}\{x=(x_0,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}|x_i\neq 0\}$ だから $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})=\bigcup_{i=0}^{n}U_i$。

(2) U_i は V_i の X 上の同値関係 $\sim$ の V_i への制限による商集合となる。写像 $V_i\to\mathbb{R}^n : (x_0,\cdots,x_n)\mapsto(\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i})$ は写像 $U_i\mapsto\mathbb{R}^n$ をひきおこし、これは問題の写像 $\mathbb{R}^n\to U_i$ の逆写像を与える。

(3) $x,y\in X$ とすると、$\mathbb{R}x=\mathbb{R}y$ と $x\sim y$ は同値だから単射 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\to\{\mathbb{R}^{n+1}$の１次元部分空間$\}$ がひきおこされる。任意の１次元部分空間 L に対し、$x\in X$ をその基底とすると $L=\mathbb{R}x$ だからこれは全射。

4.

(1)

$$\{0,1,\cdots,n-1\}.$$

(2)

$$\frac{m(m-1)}{2}\equiv\begin{cases}0 \bmod 2 & n\equiv 0,1 \bmod 4 \text{ のとき}\\ 1 \bmod 2 & n\equiv 2,3 \bmod 4 \text{ のとき}\end{cases}$$

だから $n=4$.

5.

(1) 同値関係 $\equiv$ は, V の $\mathbb{R}$ 線形部分空間 $W=\{f\in V : f$ は X^nで割り切れる $\}$ が定める同値関係と同じだから, $E=V/W$. これは商空間として $\mathbb{R}$ 線形空間の構造を持つ.

(2) $\langle 1,X,\cdots,X^{n-1}\rangle\subset V$ は W の補空間だから, 商空間の次元も n.

1104

集合と位相 演習 問題 (1997.11.04)

問題 **1.** 集合 $\mathbb{R}$ に同値関係を

$$s \sim t \text{ とは } s - t \in \mathbb{Z}$$

によって定める．商集合 $\mathbb{R}/\sim$ を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と書く．

(1) 実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し，a 倍写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ が，写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をひきおこすための a の条件を求めよ。*(*$\sim$ を X 上の同値関係 $\sim'$ を Y 上の同値関係、$p : X \to X/\sim, q : Y \to Y/\sim'$ をそれぞれ標準写像としたとき、写像 $f : X \to Y$ が写像 $g : X/\sim \to Y/\sim'$ をひきおこすとは、図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X/\sim & \xrightarrow[g]{} & Y/\sim' \end{array}$$

を可換にする *(*$q \circ f = g \circ p$ ということ*)* 写像 $g : X/\sim \to Y/\sim'$ が存在することをいい、このとき g を f によってひきおこされた写像という。)

(2) a を *(1)* の条件が満たされるような実数とし，$g_a : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ をひきおこされた写像とする．$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し、集合 $g_a^{-1}(x)$ の元の個数を求めよ。

問題 **2.** *(1).* 全単射 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ を一つ与えよ。
(2). 次の無限集合がそれぞれ可算かどうか判定せよ。理由も与えること。

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (\text{問題 1 のもの}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (\text{問題 1 で } \mathbb{R} \text{ を } \mathbb{Q} \text{ でおきかえたもの}),$$
$$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \{ \text{写像 } \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \} = \{ \text{有理数列 } (a_0, a_1, \cdots) \},$$
$$\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})} = \{ \text{有理数列 } (a_0, a_1, \cdots) \text{ のうち有限個の } n \text{ をのぞき } a_n = 0 \text{ となるもの} \}.$$

問題 **3.** $n > m$ を自然数とし単射 $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$ により $\mathbb{R}^m$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合と同一視する．このとき $\mathbb{R}^n$ のふつうの位相の $\mathbb{R}^m$ への制限は $\mathbb{R}^m$ のふつうの位相と一致することを示せ．

問題 **4.** 半開区間 $[0,1)$ から $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ への写像 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ は、連続な全単射だが同相写像ではないことを示せ。

問題 **5.**

(1) 同相写像　開区間 $(0,1) \to \mathbb{R}$ を 1 つ与えよ。
(2) 同相写像 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{R}^2$ を 1 つ与えよ。
(3) 一般に n を自然数とするとき同相写像 $\{x = (x_i)_i \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\} \to \mathbb{R}^n$ を 1 つ与えよ。

問題 **6.** n を自然数とする。$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$ とし，$M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ からの導入位相により位相空間と考える．写像 $GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A^{-1}$ は同相写像であることを示せ。

問題 7*. $\mathbb{R}$ の任意の開集合は、高々可算個の開区間の *disjoint union* であることを示せ。

問題 8. 講義中の $\mathbb{R}$ の非可算性の 2 つめの証明で任意の n に対し $a \neq a_n$ となることの証明を省略したので, この部分を確かめよ.

問題 9. 次の文章のように全単射 $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を定義したときの，$q(10), q(20)$ を求めよ。

有理数 x を既約分数表示 $x = \frac{m}{n}$ したときの，分子と分母の絶対値のうち大きいほう $\max(|m|, |n|)$ を x の高さとよび $h(x)$ と書くことにする．たとえば $h(0) = h(1) = h(-1) = 1, h(-\frac{2}{5}) = 5$．自然数 $n \geq 0$ に対し，$h(x) \leq n$ をみたす有理数 x は有限個しかないので，$N(n)$ で高さが n 以下の有理数の個数を表すことにする．たとえば $N(1) = 3, N(2) = 7$. 自然数 $m \geq 0$ に対し $m < N(n)$ を満たす最小の自然数 $n \geq 1$ を $n(m)$ とし，高さが $n(m)$ の有理数のうちで小さいほうから $N(n(m)) - m$ 番目のもの $q(m)$ を対応させることにより写像 $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を定めるとこれは全単射である．たとえば $q(0) = 1, q(1) = 0, q(2) = -1, q(3) = 2, q(4) = \frac{1}{2}, q(5) = -\frac{1}{2}, \cdots$

集合と位相 演習 問題略解 (1997.11.04)

1. (1). $a \in \mathbb{Z}$ が必要十分。なぜなら $x-y \in \mathbb{Z}$ なら $ax-ay \in \mathbb{Z}$ がなりたつための条件だから。

(2). $a \neq 0$ ならば任意の $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し、集合 $g_a^{-1}(x)$ の元の個数は $|a|$ 個。$a=0$ のときは, $x \neq \bar{0}$ なら $g_a^{-1}(x)$ の元の個数は 0 個、$x=\bar{0}$ なら $g_a^{-1}(x)$ の元の個数は非可算無限個。

2. (1). $\frac{m(m-1)}{2} \leq n < \frac{m(m+1)}{2}$ なら $n \mapsto (n-\frac{m(m-1)}{2}, m-(n-\frac{m(m-1)}{2}))$.

(2). 可算なもの

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}.$$

非可算なもの

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}.$$

3. (1)U が $\mathbb{R}^m$ の開集合なら $\mathbb{R}^n$ の開集合 V で $U = V \cap \mathbb{R}^m$ となるものがあることと, (2)V が $\mathbb{R}^n$ の開集合なら $V \cap \mathbb{R}^m$ が $\mathbb{R}^m$ の開集合であることを示せばよい.

(1).$V = U \times \mathbb{R}^{n-m} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | (x_1, \cdots, x_m) \in U\}$ とおけばよい.

(2)$a \in V \cap \mathbb{R}^m$ とし, $\epsilon > 0$ が $\{x \in \mathbb{R}^n | |x-a| < \epsilon\} \subset V$ を満たすとすると, $\{x \in \mathbb{R}^m | |x-a| < \epsilon\} \subset V \cap \mathbb{R}^m$.

4. 全単射なことは明らかでしょう。$\cos, \sin$ は連続だから問題の写像は連続。逆写像は点 $(1,0) \in S^1$ で連続でない。

5. (1). $x \mapsto \frac{1-\frac{x}{2}}{x(1-x)}$.

(2). $(x,y) \mapsto (\frac{x}{1-(x^2+y^2)}, \frac{y}{1-(x^2+y^2)})$.

(3). $x = (x_i)_i \mapsto (\frac{x_i}{1-\sum_{j=1}^n x_j^2})_i$.

6. A^{-1} の各成分は A の成分の有理式で与えられるから $A \mapsto A^{-1}$ は連続。逆写像はもとの写像と同じだから連続、したがって同相。

7. $\Lambda = \{I | I$ は U に含まれる $\mathbb{R}$ の開区間で次の条件のどれか 1 つが満たされるもの $1.I = (a,b)$ かつ $a, b \notin U, 2.I = (a, \infty)$ かつ $a \notin U, 3.I = (-\infty, b)$ かつ $b \notin U, 4.I = \mathbb{R}\}$ とおく。

まず U が開区間の disjoint union であることを示す. $U = \bigcup_{I \in \Lambda} I$ かつ $I, J \in \Lambda, I \cap J \neq \emptyset$ ならば $I = J$ を示せばよい。$x \in U$ と仮定して、$x \in I$ となる $I \in \Lambda$ がただ一つ存在することを示せばよい。a を $(y,x) \subset U$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ の下限とし、b を $(x,y) \subset U$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ の上限とする。($a=-\infty, b=\infty$ となる場合もありうる) このとき $I = (a,b)$ は x をふくむただ 1 つの Λ の元である。

次に Λ が可算集合であることを示す。写像 $U \cap \mathbb{Q} \to \Lambda$ を、$x \in U \cap \mathbb{Q}$ に対し $x \in I$ となるただ一つの区間 $I \in \Lambda$ を対応させることにより定める。するとこれは全射であり、$U \cap \mathbb{Q}$ は可算集合だから Λ も可算。

8. a の定めかたから,a と a_n は小数点以下 n 番目の数字がことなる. これらが等しいためには, そこから先の数字が全て 9 であるか全て 0 であることが必要. ところが a の定めかたからこうはならない.

9. $q(6) = -2, q(7) = 3, q(8) = \frac{2}{3}, q(9) = \frac{3}{2}, q(10) = \frac{1}{3}, \cdots, q(15) = 4, q(16) = \frac{4}{3}, q(17) = \frac{3}{4}, q(18) = \frac{1}{4}, q(19) = -\frac{1}{4}, q(20) = -\frac{3}{4}, \cdots$.

1111

集合と位相 演習 問題 (1997.11.11)

問題 **1.** *(1).* 標準写像 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ は同相写像であることを示せ. ここで $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m+n}$ にはふつうの位相を考え, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ にはその積位相を考える.

(2). Y, Y' を位相空間とし, X, X' をそれぞれの部分空間とする. $X \times X'$ 上の積位相は $Y \times Y'$ の部分空間としての位相と一致することを示せ.

(3). *(1)* と *(2)* から先週の問題 *3*.

$m < n$ に対し, $\mathbb{R}^n$ のふつうの位相の $\mathbb{R}^m$ への制限は $\mathbb{R}^m$ のふつうの位相と一致する.

を導け.

問題 **2.** *(1).* 写像 $S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$:

$$((x_1, \cdots, x_{n+1}), y) \mapsto (x_1 \exp y, \cdots, x_{n+1} \exp y)$$

は同相写像であることを示せ.

(2). 写像 $S^n - \{(0,0,\cdots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}})$$

は同相写像であることを示せ.

(3). 2次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ からの写像 $f : T^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + 2 \\ 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を考える. f は同相写像 $T^2 \to f(T^2)$ を定めることを示せ.

問題 **3*.** n を自然数とする。

$$\begin{aligned} K =& O_n(\mathbb{R}) = \{X \in GL_n(\mathbb{R}) | {}^t XX = 1\}, \\ A =& \{X \in GL_n(\mathbb{R}) | X \text{ は対角成分が正 } (> 0) \text{ である対角行列 }\}, \\ N =& \{X \in GL_n(\mathbb{R}) | X \text{ は対角成分が } 1 \text{ である上三角行列 }\} \end{aligned}$$

とおく。

(1) K は $M_n(\mathbb{R})$ の有界な閉集合で, A, N はそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ と同相な $GL_n(\mathbb{R})$ の閉集合であることを示せ。

(2) 積が定める写像 $K \times A \times N \to GL_n(\mathbb{R}) : (X, Y, Z) \mapsto XYZ$ は同相写像であることを示せ。

集合と位相 演習 問題略解 (1997.11.11)

1.(1).$U \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ とする. U がふつうの位相での開集合なら任意の $a \in U$ に対し $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^{m+n} | |x-a| < \epsilon\}$ を満たす $\epsilon > 0$ が存在し, 積位相での開集合なら任意の $a = (a_1, a_2) \in U$ に対し $V_\epsilon(a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m | |x_i - a_i| < \epsilon\}$ をみたす $\epsilon > 0$ が存在する. $U_\epsilon(a) \subset V_\epsilon(a) \subset U_{2\epsilon}(a)$ だから両位相は一致する.

(2). S を任意の位相空間とし, $f : S \to X \times X'$ を任意の写像とする. このときどちらの位相に対しても, f が連続であるためには $pr_1 \circ f : S \to Y, pr_2 \circ f : S \to Y'$ がともに連続となることが必要十分だから, 両位相は一致する.

(3). $X = Y = \mathbb{R}^m$, $X' = \{0\}, Y' = \mathbb{R}^{n-m}$ として, (2) を適用すると, $X = \mathbb{R}^m$ のふつうの位相は $Y \times Y' = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ の積位相の制限であることがわかる. (1) よりこの積位相はふつうの位相だからこれで示された.

2.(1). この写像は各成分が連続だから連続. 逆写像は $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n \times \mathbb{R}$:

$$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto ((\frac{x_1}{|x|}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{|x|}), \log|x|)$$

で与えられ, 定義域では $|x| \neq 0$ だから各成分が連続. したがって逆写像も連続.

(2). 定義域では $1 - x_{n+1} \neq 0$ だから, この写像も各成分が連続だから連続. 逆写像は $\mathbb{R}^n \to S^n - \{(0, 0, \cdots, 0, 1)\}$:

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (\frac{2}{|x|^2+1}x_1, \cdots, \frac{2}{|x|^2+1}x_n, 1 - \frac{2}{|x|^2+1})$$

で与えられ, $|x|^2 + 1 \neq 0$ だから各成分が連続. したがって逆写像も連続.

(3). この写像は各成分が多項式だから連続. 逆写像が $(x, y, z) \mapsto$

$$((\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}), (\sqrt{x^2+y^2} - 2, z)$$

で与えられるから $T^2 \to f(T^2)$ は全単射. $f(T^2)$ 上で $x^2 + y^2 \neq 0$ だから逆写像の各成分も連続. よって逆写像も連続.

3. (1). ${}^tXX$ の各成分は X の成分の多項式だから K は閉集合。$X = (x_{ij}) \in K$ なら各 $1 \leq i \leq n$ に対し $\sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = 1$ だから K は有界。$A = \{X = (x_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R}) | i \neq j$ なら $x_{ij} = 0$ かつ $i = j$ なら $x_{ij} \geq 0\}$ だから A は閉集合。$(x_i)_i \in \mathbb{R}^n$ に対し、(i, i)-成分が $\exp x_i$ であるような対角行列を対応させる写像 $\mathbb{R}^n \to A$ は同相写像。N についてはこれよりは簡単だから略。

(2). $X \in GL_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^n$ の基底 $x_1, \cdots, x_n$ を横に並べた行列とみなせる。このとき $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ で e_i は $x_1, \cdots, x_i$ の線形結合でありかつ e_i を $x_1, \cdots, x_i$ の線形結合と表したときの、x_i の係数 a_i が正であるようなものがただ一つ存在する。U を $e_1, \cdots, e_n$ を横に並べた行列、$U \in K = O_n(\mathbb{R})$, V を (i, i)-成分が a_i であるような対角行列とすると、$V \in A$ である。さらに $W = (UV)^{-1}X$ とおくとこれは N に属するので、X に対し (U, V, W) を対応させることにより、写像 $GL_n(\mathbb{R}) \to K \times A \times N$ が定まる。あとはこれが問題の写像の逆写像であることと、それらがともに連続写像であることを確かめればよい。(以下略)

1118

集合と位相 演習 問題 (1997.11.18)

問題 **1.** 先週の問題 *2 (1)*. 写像 $S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$:

$$((x_1, \cdots, x_{n+1}), y) \mapsto (x_1 \exp y, \cdots, x_{n+1} \exp y)$$

は同相写像であることを示せ.

(2). 写像 $S^n - \{(0,0,\cdots,0,1)\} \to \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}})$$

は同相写像であることを示せ.

問題 **2.** 講義中にでてきた連続全単射

$$f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim, x \mapsto \bar{x}$$

の逆写像 $g : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim \to S^n$ が連続なことを, 標準全射 $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ との合成 $g \circ p$ が連続なことを示すことによって証明せよ.

問題 **3.** 講義中にでてきた連続全単射

$$f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to S^1, \bar{t} \to (\cos t, \sin t)$$

の逆写像 $g : S^1 \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ が連続なことを次のようにして示せ.

(1). $U_1 = \{(x,y) \in S^1 | x > 0\}, U_2 = \{(x,y) \in S^1 | y > 0\}, U_3 = \{(x,y) \in S^1 | x < 0\}, U_4 = \{(x,y) \in S^1 | y < 0\}$ とおく. 各 i に対し, g の U_i への制限 g_i が連続なことを示せ.

(2). *(1)* を使って g が連続なことを導け.

問題 **4.** *(1)*. 集合 $X = \mathbb{R}$ 上の同値関係 $s - t \in \mathbb{Z}$ について, 半開区間 $[0,1)$ は完全代表系だから, 標準全射との合成写像 $[0,1) \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は連続全単射であるが, 同相写像ではないことを示せ.

(2). 閉区間 $[0,1]$ 上の同値関係 $\sim$ を上の *(1)* の同値関係の制限として定める. このとき標準写像 $[0,1]/\sim \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は同相写像であることを示せ.

集合と位相 演習 問題略解 (1997.11.18)

1.(1). この写像は各成分が連続だから連続. 逆写像は $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}\to S^n\times\mathbb{R}$:

$$x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\mapsto((\frac{x_1}{|x|},\cdots,\frac{x_{n+1}}{|x|}),\log|x|)$$

で与えられ, 定義域では $|x|\neq 0$ だから各成分が連続. したがって逆写像も連続.

(2). 定義域では $1-x_{n+1}\neq 0$ だから, この写像も各成分が連続だから連続. 逆写像は $\mathbb{R}^n\to S^n-\{(0,0,\cdots,0,1)\}$:

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(\frac{2}{|x|^2+1}x_1,\cdots,\frac{2}{|x|^2+1}x_n,1-\frac{2}{|x|^2+1})$$

で与えられ, $|x|^2+1\neq 0$ だから各成分が連続. したがって逆写像も連続.

2. $g\circ p(x)=\frac{x}{|x|}$ で各成分は連続だからよい.

3. (1). $\sin:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to(-1,1)$ の逆写像を $\sin^{-1}:(-1,1)\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ と書くことにすると, これは連続で $g_1=p\circ\sin^{-1}\circ pr_2$ だから連続. 他も同様.

(2) $S^1=U_1\cup U_2\cup U_3\cup U_4$ であり U_i は全て開集合. $V\subset\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を開集合とすると, $g^{-1}(V)=\bigcup_i g_i^{-1}(V)$ で $g^{-1}(V)\subset U_i\subset S^1$ は U_i のしたがって S^1 の開集合. よって $g^{-1}(V)$ は開集合.

4. (1). 例えば半開区間 $[0,\frac{1}{2})$ は $[0,1)$ の開集合であるが, その像は S^1 の開集合でない.

(2). $U\subset[0,1]/\sim$ を開集合として, U の $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ での像 V が開集合であることを示せばよい. $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}, q:[0,1]\to[0,1]/\sim$ を標準全射とすると, $p^{-1}(V)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}U_n$ (但し $U_n=\{x+n|x\in q^{-1}(U)\}$) となる. これが $\mathbb{R}$ の開集合であることを示したい. $x\in p^{-1}(V)$ とし, $n\leq x<n+1$ となる整数 n をとる. $x\neq n$ なら $x-n\in q^{-1}(U)\subset[0,1]$ だから正の実数 $\epsilon>0$ で $\{y\in\mathbb{R}||y-(x-n)|<\epsilon\}\subset q^{-1}(U)$ となるものが存在する. このとき $\{y\in\mathbb{R}||y-x|<\epsilon\}\subset U_n\subset p^{-1}(V)$ である. $x=n$ なら $0,1\in q^{-1}(U)$ となるから, 正の実数 $\epsilon_1,\epsilon_2>0$ で $\{y\in\mathbb{R}|0\leq y<\epsilon_1\}\subset q^{-1}(U),\{y\in\mathbb{R}|1-\epsilon_2<y\leq 1\}\subset q^{-1}(U)$ となるものが存在する. ϵ を $\epsilon_1,\epsilon_2>0$ の小さいほうとすれば, $\{y\in\mathbb{R}||y-x|<\epsilon\}\subset U_n\subset p^{-1}(V)$ である. よって $p^{-1}(V)$ は $\mathbb{R}$ の開集合.

1125

集合と位相 演習 問題 (1997.11.25)

問題 **1.** 位相空間 $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\geq 0, y\geq 0, (x,y)\neq(0,0)\}$ に同値関係 $\sim$ を, $(x',y')\sim(x,y)$ とは, 正の実数 $t>0$ で $x'=tx, y'=t^{-1}y$ を満たすものが存在することとして定める. $Y=X/\sim$ をこの商空間とする.

(1) Y が分離でないことを示せ. *(*$\{\overline{(1,0)}\}$ の任意の開近傍と $\{\overline{(0,1)}\}$ の任意の開近傍は交わることを示せばよい.*)*
(2) Y の各点 $y\in Y$ に対し, $\{y\}$ は閉集合であることを示せ.
(3)* Y の対角集合 Δ の $Y\times Y$ での閉包を求めよ.

問題 **2.** X を位相空間とし, X の部分集合 A に対し, $\bar{A}$ でその閉包を表す.

(1) $\bar{A}$ は A と交わらない X の開集合全ての合併の補集合であることを示せ.
(2)

$$\bar{A}\supset A,\quad \overline{(\bar{A})}=\bar{A},\quad \overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B},\quad \bar{\emptyset}=\emptyset$$

が成り立つことを示せ.

問題 **3.** X を無限集合とし, X は講義中にでてきた, 「F が X の閉集合であるとは, F が有限集合かまたは, $X=F$」で定まる位相をもつとする. このとき対角集合 Δ の $X\times X$ での閉包を求めよ.

問題 **4.** $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし, 次の条件を考える.

(1) 積 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ は分離.
(2) 全ての $\lambda\in\Lambda$ に対し, X_λ は分離.

講義中に (1) $\Rightarrow$ (2) を示した. 全ての $\lambda\in\Lambda$ に対し, $X_\lambda\neq\emptyset$ ならば, (1) $\Leftarrow$ (2) もなりたつことを示せ.

集合と位相 演習 問題略解 (1997.11.25)

1. (1) U を $\{\overline{(1,0)}\}$ の開近傍, V を $\{\overline{(0,1)}\}$ の開近傍とする. $p : X \to Y$ を標準全射とすると, $p^{-1}(U), p^{-1}(V)$ はそれぞれ $(1,0),(0,1)$ を含む X の開集合だから, 正の実数 $\epsilon > 0$ で, $\{x \in X||x-(1,0)| < \epsilon\} \subset p^{-1}(U), \{x \in X||x-(0,1)| < \epsilon\} \subset p^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. $0 < t < \epsilon$ ととれば, $p(1,t) = p(t,1) \subset U \cap V$ となるから $U \cap V \neq \emptyset$.

(2). 各点 $x = (a,b) \in X$ に対し, $p^{-1}(\{\bar{x}\})$ は X の閉集合であることを示せばよい. $a,b > 0$ のときは $p^{-1}(\{\bar{x}\}) = \{(s,t) \in X|st = ab\}$ だから閉集合. $a = 0$ のときは $p^{-1}(\{\bar{x}\}) = \{(s,t) \in X|s = 0\}$ だから閉集合. $b = 0$ の場合も同様にして確かめられる

(3). 閉包は $\Delta \cup \{(\overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}), (\overline{(1,0)}, \overline{(0,1)})\}$.

2.(1). F を A と交わらない X の開集合全ての合併の補集合とする. F は A を含みかつ X の閉集合であることは簡単. F' を A を含む X の閉集合とすると F' の補集合は A と交わらない X の開集合だから F の補集合に含まれる. よって $F' \supset F$. 従って $F = \bar{A}$.

(2). $\bar{A} \supset A$ は閉包の定義よりよい. $\overline{\emptyset} = \emptyset$ も $\emptyset$ が閉集合だからよい. $\bar{A}$ は閉集合だから $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$ もよい. $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ だから $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. 逆に $\overline{A \cup B} \supset \bar{A}, \bar{B}$ だから $\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$.

3. $x, y \in X, x \neq y$ とすると, 講義中にやったように, それぞれの任意の開近傍 U, V に対し $U \cap V \neq \emptyset$. すなわち $\Delta \cap (U \times V) \neq \emptyset$ となる. したがって, Δ と交わらない $X \times X$ の開集合は $\emptyset$ だけ. よって Δ の閉包は $X \times X$ 全体.

4. $\lambda \in \Lambda$ とする. 各 $\mu \in \Lambda$ に対し $x_\mu \in X_\mu$ をとる. $y \mapsto (y_\mu)_\mu (y_\lambda = y, y_\mu = x_\mu (\mu \neq \lambda))$ により, X_λ は積 X の部分空間と同一視される. 分離空間の部分空間は分離だからよい.

11XX

V を $\mathbb{R}$-線型空間とし $\{x_1, \cdots, x_n\}$ をその基底とする. L を $x_1, \cdots, x_n$ によって生成される格子とし,

$$A = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n | \text{全ての } 1 \leq i \leq n \text{ に対し } 0 \leq a_i < 1\}$$

とおき, A 上の同値関係 $\sim_A$ を $x \sim_A y$ とは $x - y \in L$ として定義する. このとき包含写像 $A \to V$ が商空間にひきおこす写像 $A/\sim_A \to V/L$ は同相写像であることを示せ.

(ヒント: まず $V = \mathbb{R}, x_1 = 1$ の場合に示し, 一般の場合をそれに帰着する.)

問題 **3.** *(1).* X を集合 Y の部分集合とし, $\sim_Y$ を Y 上の同値関係とする. X 上の同値関係 $\sim_X$ を, $x, x' \in X$ に対し, $x \sim_X x'$ とは $x \sim_Y x'$ のこととおいて定める. *(*このとき $\sim_X$ のことを $\sim_Y$ の X への制限という.*)* すると, $(x$ の $\sim_X$ での同値類$) \mapsto (x$ の $\sim_Y$ での同値類$)$ は, 単射 $i : \bar{X} = X/\sim_X \to \bar{Y} = Y/\sim_Y$ を定めることを示せ.

(2). (1) の状況で Y に位相が与えられているとし, X にその部分空間としての位相を考える. $\bar{X}, \bar{Y}$ にそれぞれの商空間としての位相を与えると, *(1)* の単射 $i : \bar{X} = X/\sim_X \to \bar{Y} = Y/\sim_Y$ は連続写像であることを示せ.

(3). (2) で考えた $\bar{X}$ の商空間としての位相と, 単射 i によって $\bar{X}$ を商空間 $\bar{Y}$ の部分空間と考えたときの位相はどちらが強いか調べよ. 一致しない例を与えよ.

合成写像 $A \to V \to V/L$ は連続だから商位相の性質より $\bar{A} = A/\sim_A \to \bar{V} = V/L$ は連続. 全単射は $\sim_A$ の定義より従う. 同相であることを示す. 講義中と同様に積として表すことにより, $V = \mathbb{R}, x_1 = 1i$ の場合に帰着される. U を $\bar{A}$ の開集合としてその $\bar{V}$ での像が開集合であることをいえばよい. U が開集合であるためには, その $A = [0, 1]$ への逆像 W が A の開集合でかつ $\{0, 1\} \cap W$ が $\{0, 1\}$ となるかまたは $\emptyset$ となることが必要十分. U の $\bar{V}$ での像が開集合となるためには, $W + \mathbb{Z} = \{x + n | x \in W, n \in \mathbb{Z}\}$ が $\mathbb{R}$ の開集合となることが必要十分. $\{0, 1\} \cap W = \emptyset$ のときは, W は $\mathbb{R}$ の開集合だから $W + \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (W + n)$ も開集合.

開区間 $(0, 1)$ の $\bar{A}$ への像は開集合でそこへの制限は同相である.

3. $x, x' \in X$ に対し, (x の $\sim_Y$ での同値類) =(x' の $\sim_Y$ での同値類) とすると, $x \sim_Y x'$ だから $x \sim_X x'$ なるので (x の $\sim_X$ での同値類) =(x' の $\sim_X$ での同値類) したがって i は単射である.

(2). 合成写像 $X \to Y \to \bar{Y}$ は連続であり, これが商集合に引き起こす写像が $i : \bar{X} \to \bar{Y}$ だから商位相の性質により i は連続.

(3). 商位相を持った $\bar{X}$ を $\bar{X}_1$ 部分空間としての位相を持った $\bar{X}$ を $\bar{X}_2$ とかくことにすると, 恒等写像 $X_1 \to X_2$ は連続だから商位相の方が強い. 問題 2 の $\mathbb{R}$ を Y, $[0, 1)$ を X, 同値関係もそこのものを考えると $\bar{X}$ は $X = [0, 1)$ 自身であり, $\bar{Y}$ は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ だからこれが反例.

1202

集合と位相 演習 問題 (1997.12.02)

問題 **1.** X と Y を位相空間とする.

(1) X が準コンパクトなら第 *2* 射影 $pr_2 : X \times Y \to Y$ は閉集合を閉集合に写すことを示せ.

(2) $f : X \to Y$ を連続写像とする. Y が分離なら f のグラフ $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$ は $X \times Y$ の閉集合であることを示せ.

(3) *(1)* と *(2)* を使って命題「X が準コンパクトで Y が分離なら, 連続写像 $f : X \to Y$ は閉集合を閉集合に写す」を示せ. *(*この命題は重要なので来週違う証明をします.*)*

問題 **2.** 先週の問題 *1* に出てきた位相空間 $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0, (x, y) \neq (0, 0)\}$ の同値関係「$(x, y) \sim (x', y')$ とは, 正の実数 $t > 0$ で $x' = tx, y' = t^{-1}y$ を満たすものが存在すること」による商空間 $Y = X/\sim$ は分離ではないが, 局所的には分離なことを示せ.

問題 **3.** 位相空間 X に対し, 次の条件を考える.

(1) X は分離.

(2) 任意の位相空間 S と, 任意の連続写像 $f, g : S \to X$ に対し, $\{s \in S | f(s) = g(s)\}$ は S の閉集合.

講義中 (1) $\Rightarrow$ (2) を示したが, 逆もなりたつことを示せ.

問題 **4*****.** 講義中に「写像 { 連続関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$} $\to$ { 写像 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$} : $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ は単射である」ことを示した. このことを使って, 全単射 { 連続関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$} $\to \mathbb{R}$ が存在することを示せ.

集合と位相 演習 問題略解 (1997.12.02)

1.(1) X が準コンパクトとし、閉集合 $F \subset X \times Y$ の像 $pr_2(F) \subset Y$ は閉集合であることを示す. $y \notin pr_2(F)$ とする. $X \times \{y\} \cap F = \emptyset$ だから、$x \in X$ にたいし, x の開近傍 U_x と y の開近傍 V_x で、$U_x \times V_x \cap F = \emptyset$ となるものが存在する. X は準コンパクトだから, 有限個の U_{x_i} で X をおおうことができる. このとき $V = \bigcap V_{x_i}$ は y の開近傍で, $X \times V \cap F = \emptyset$. したがって $V \cap pr_2(F) = \emptyset$. よって F は閉集合.

(2). 連続写像 $F: X \times Y \to Y \times Y$ を $F(x, y) = (f(x), y)$ により定める. $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta_Y)$ だからこれは $X \times Y$ の閉集合.

(3). 連続写像 $g: X \to X \times Y$ を $g(x) = (x、f(x))$ により定めると, $f = pr_2 \circ g$ だから, pr_2 と g がどちらも閉集合を閉集合にうつすことをいえばよい. X が準コンパクトだから pr_2 は (1) より Y が分離だから g は (2) よりわかる.

2. $U_1 = \{(x, y) \in X | x > 0\}, U_2 = \{(x, y) \in X | y > 0\}$ の Y での像をそれぞれ V_1, V_2 とすると、これらは開集合でどちらも $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ と同相. したがって局所的には分離.

3. $S = X \times X, f = pr_1, g = pr_2$ ととればよい.

4. 単射 { 写像 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ が存在することをいえばよい. 全単射 $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}, \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ が存在するから, 全単射 { 写像 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}\} \to \{$ 写像 $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}\} \to 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ が存在する.

1209

集合と位相 演習 問題 (1997.12.09)

問題 **1.**

(1) $X = [0,1]^2$ 上の同値関係 $\sim_X$ を $(s,t) \sim_X (s',t')$ とは

$$s \neq s' \text{ なら } s, s' \in \{0,1\} \text{ かつ } t \neq t' \text{ なら } t, t' \in \{0,1\}$$

と定義する．連続写像

$$X \to T^2 (= S^1)^2 : (s,t) \mapsto ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$$

は商空間からの同相写像 $X/\sim_X \to T^2$ をひきおこすことを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の同値関係

$$(s,t) \sim (s',t') \text{ とは } (s,t) - (s',t') \in \mathbb{Z}^2$$

による商空間を $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で表す．連続写像

$$\mathbb{R}^2 \to T^2 : (s,t) \mapsto ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$$

は同相写像 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T^2$ をひきおこすことを示せ.

問題 **2.**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ かつ } (x = 0 \text{ ならば } y > 0)\}$$

は局所コンパクトであるが,

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ かつ } (x = 0 \text{ ならば } y > 0)\}$$

は局所コンパクトでないことを示せ．*(ヒント:*$(0,0) \subset U \subset K \subset B$ を満たす B の開集合 U とコンパクト集合 K があったとして矛盾を導く*.)*

問題 **3.** $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対し，A° で A の内部，$\bar{A}$ で A の閉包を表すものとする．次の *7* つの集合が全て互いに相異なるような $\mathbb{R}$ の部分集合 A の例を 1 つ求めよ.

$$A, \quad A^\circ, \quad \bar{A}, \quad \overline{A^\circ}, \quad (\bar{A})^\circ, \quad (\overline{A^\circ})^\circ, \quad \overline{(\bar{A})^\circ}.$$

集合と位相 演習 問題略解 (1997.12.09)

1. 講義中にやったことを全く同様に繰り返せばよい. (1). 写像を $f : X \to T^2$ とし, まず $f(x) = f(x')$ と $x \sim_X x'$ が同値であることを確かめる. すると f は連続全射であるから, 連続な全単射 $\bar{f} : X/\sim_X \to T^2$ がひきおこされる. X はコンパクトで, T^2 は分離だからきょうの命題より, $\bar{f}$ は同相. (2). $X/\sim_X \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T^2$ はそれぞれ連続全単射で, 合成が (1) により同相写像だからどちらも同相.

2. A は閉集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$ と開集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0$ または $y > 0\}$ の交わりだから局所コンパクト.

B が局所コンパクトでないことを示す. $(0,0) \subset U \subset K$ を満たす B の開集合 U とコンパクト集合 K があったとして矛盾を導く. 正の実数 $\epsilon > 0$ で $\{x \in B || x| < \epsilon\} \subset U$ となるものをとる. $0 < t < \epsilon$ を満たす正の実数 t をとると $C = \{x \in B || x| \leq t\}$ は K の閉集合となるからコンパクトのはずだが, これは $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない ($(0,-t) \in \bar{C}, \notin C$) からコンパクトでない.

3. 例えば
$$A = ((0,1) \cap \mathbb{Q}) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \{4\} \subset \mathbb{R}$$
とすると
$$A^\circ = (1,2) \cup (2,3), \quad \bar{A} = [0,3] \cup \{4\}, \quad \overline{A^\circ} = [1,3],$$
$$(\bar{A})^\circ = (0,3), \quad (\overline{A^\circ})^\circ = (1,3), \ \overline{(\bar{A})^\circ} = [0,3].$$

1216

集合と位相 演習 問題 (1997.12.16)

問題 **1.** $n \geq 2$ を自然数とする.

(1) $\mathbb{R}^{n^2}$ の部分集合

$$Y = \{(y_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n^2} | \sum_{i=1}^{n} y_{ii} = 1, y_{ii} \geq 0 (i = 1, \cdots, n), \\ y_{ij}y_{kl} = y_{ik}y_{jl}(i, j, k, l = 1, \cdots, n)\}$$

はコンパクトであることを示せ. *(ヒント:*Y *が* $\mathbb{R}^{n^2}$ *の有界な閉集合であることをいえばよい.)*

(2) 写像 $f : X = \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^{n^2}$

$$(x_i)_i \mapsto (\frac{x_i x_j}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2})_{ij}$$

は連続であることと, $f(X) = Y$ を示せ.

(3) 集合 $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim x'$ とは $f(x) = f(x')$ と定める. このとき $x \sim x'$ であるためには $x' = tx$ を満たす実数 $t \neq 0$ が存在することが必要十分であることを示せ.

(4) f の S^{n-1} への制限の像も Y であることを示せ.

(5) 商空間 $X/\sim$ を $\mathbb{P}^{n-1}$ と表す. 連続写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n^2}$ の標準分解は同相写像 $\mathbb{P}^{n-1} \to Y$ を定めることを示せ.*(ヒント:先週の問題 1 と同様.)*

問題 **2.** X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が X の点 x で連続とは, $f(x)$ の Y での任意の開近傍 V に対し, $f^{-1}(V)$ が x の X でのある開近傍を含むことをいう. 写像 $f : X \to Y$ が連続写像であることと, f が X の任意の点で連続であることは同値であることを示せ.

問題 **3.** *11* 月 *11* 日の問題 *2(2)* 「写像 $S^n - \{(0, 0, \cdots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}})$$

は同相写像」を示して, $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化は S^n と同相であることを示せ.

問題 **4*.** X を距離空間とし, $A \subset X$ を密な部分集合とする. $\mathbb{R}^A$ で A を添字集合とし各成分が $\mathbb{R}$ である集合族の積 $\prod_{x \in A} \mathbb{R}$ を表すこととし, これに積位相を与える.

(1) 写像 $X \mapsto \mathbb{R}^A : x \mapsto (d(x, a))_a$ は連続な単射であることを示せ.

(2) X の位相は上の単射により $\mathbb{R}^A$ の位相を誘導して得られることを示せ.

(3) X が全有界なら密な可算集合 A が存在することを示せ.

(4) A が可算集合とする. X が完備であることと X の $\mathbb{R}^A$ での像が閉集合であることは同値なことを示せ.

(5) 上のことから全有界かつ完備な距離空間はコンパクトであることを導け. *(コンパクト空間の (任意個の) 直積はコンパクトであることを使ってよい.)*

集合と位相 演習 問題略解 (1997.12.16)

訂正. 問題 4 (4) を以下のように訂正します.

A が可算集合とする. X が完備なら X の $\mathbb{R}^A$ での像は閉集合であることと, X が全有界なら逆も成り立つことを示せ.

1.(1) Y は連続関数の等式で定義されているから閉集合. 有界なことを示す. $y_{ii} \geq 0 (i = 1, \cdots, n), \sum_{i=1}^n y_{ii} = 1$ だから $0 \leq y_{ii} \leq 1$. $y_{ij}^2 = y_{ii}y_{jj} (i, j = 1, \cdots, n)$ だから $-1 \leq y_{ii} \leq 1$.

(2). 各成分の分子分母が連続で分母は 0 でないから連続. $f(X) \subset Y$ は計算すればよい. f が全射を示す. $y \in Y$ とすると $0 < y_{ii}$ となる $1 \leq i \leq n$ が必ず存在するからそれを 1 つとる. 対称性より $i = 1$ としてよい. $x_1 = \sqrt{y_{11}}$ とおき $x_i = y_{i1}/x_1$ とおけば $f((x_i)_i) = y$ は計算により確かめられる.

(3). 十分であることは $f(x)$ の分子分母がともに t^2 倍されることからわかる. 必要であることを示す. $x, x' \in X$ で $f(x) = f(x')$ とする. $x_i \neq 0$ となる i が必ず存在するからそれを 1 つとる. 対称性から $i = 1$ としてよい. $t = x_1'/x_1$ とおけば $x' = tx$ となることは計算して確かめられる.

(4). (2) で見つけた x は S^{n-1} にはいる.

(5). X の同値関係 $\sim$ の S^{n-1} への制限も $\sim$ で表す. コンパクト空間 S^{n-1} から分離空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ への連続写像の標準分解 $S^{n-1}/\sim \to f(S^{n-1}) = Y$ は同相写像. 連続全単射 $S^{n-1}/\sim \to \mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{P}^{n-1} \to X/\sim \to Y$ の合成は同相写像だから, どちらも同相写像.

2. 写像 $f : X \to Y$ が連続写像.
$\Leftrightarrow$
任意の Y の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合.
$\Leftrightarrow$
任意の Y の開集合 V と任意の $x \in X$ に対し, $x \in f^{-1}(V)$ なら x の X での開近傍で $f^{-1}(V)$ に含まれるものが存在する.
$\Leftrightarrow$
任意の $x \in X$ と任意の Y の開集合 V に対し, V が $y = f(x)$ の Y での開近傍なら x の $f^{-1}(V)$ に含まれる X での開近傍が存在する.
$\Leftrightarrow$
f が X の任意の点で連続.

3. 各成分の分子分母が連続で分母は 0 にならないから連続. 逆写像は $\mathbb{R}^n \to S^n - \{(0, 0, \cdots, 0, 1)\}$:

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (\frac{2}{|x|^2 + 1}x_1, \cdots, \frac{2}{|x|^2 + 1}x_n, 1 - \frac{2}{|x|^2 + 1})$$

で与えられ, $|x|^2 + 1 \neq 0$ だから各成分が連続. したがって逆写像も連続.

S^n はコンパクトで $S^n - \{(0, 0, \cdots, 1)\}$ が $\mathbb{R}^n$ と同相だから S^n は $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化と同相.

4. (1). 各成分が連続関数だから連続. 単射を示す. $x, x' \in X$ とし, 任意の $a \in A$ に対し $d(x,a) = d(x',a)$ とする. 分離空間 $\mathbb{R}$ への 2 つの連続写像 $y \mapsto d(x,y), d(x',y)$ が X の密な部分集合 A で一致するから任意の $y \in X$ に対し $d(x,y) = d(x',y)$. $y = x'$ としてみると $d(x,x') = d(x',x') = 0$ だから $x = x'$.

(2). (1) より, 誘導して得られる位相 T' は距離 d が定める位相 T より弱い. 逆に U を位相 T での開集合とし, これが位相 T' での開集合であることを示す. $x \in U$ とすると, 正の実数 $\epsilon > 0$ で $U_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x,y) < \epsilon\} \subset U$ となるものがあり, さらに $a \in U_{\epsilon/2}(x)$ となる $a \in A$ もある. すると $x \in U_{\epsilon/2}(a) = (y \mapsto d(y,a))^{-1}((-1,\epsilon)) \subset U_\epsilon(x) \subset U$ となるから U は T' の開集合.

(3). X が全有界だから, 任意の自然数 $n > 0$ に対し, $X = \bigcup_{x \in A_n} U_{1/n}(x)$ となるような有限部分集合 $A_n \subset X$ があるのでそれを 1 つとる. $A = \bigcup A_n$ とすればよい.

(4). A が可算集合とすると, $\mathbb{R}^A$ は第 1 可算公理を満たすから, X の像が閉集合であることためには X の点列 $\{x_n\}_n$ について, 「任意の $a \in A$ に対し, 極限 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = d_a$ が存在するなら任意の $a \in A$ に対し, $d(x,a) = d_a$ をみたす $x \in X$ が存在する」がなりたつこととが必要十分である.

X が上の条件を満たすなら, 完備なことを示す. X の点列 $\{x_n\}_n$ が Cauchy 列なら, 任意の $a \in A$ に対し, 数列 $\{d(x_n,a)\}_n$ も Cauchy 列となるから極限 d_a がある. 上の条件が満たされるとすると, その x が $\{x_n\}_n$ の極限となるので X は完備である.

X を全有界かつ完備と仮定して上の条件がなりたつことを示す. X の点列 $\{x_n\}_n$ が任意の $a \in A$ に対し, 極限 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = d_a$ を持つとする. X は完備かつ全有界なので, $\{x_n\}_n$ は収束する部分列がある. その極限を x とすると, 任意の $a \in A$ に対し, $d(x,a) = d_a$ となる.

(5).

各 $a \in A$ に対し $d(a,X) \subset [-M_a, M_a]$ となる実数 $M_a \geq 0$ をとる. すると X はコンパクト空間の積 $\prod_{a \in A}[-M_a, M_a]$ の閉部分空間と同相だからコンパクト.

集合と位相 演習 問題 (1998.1.13)

問題 **1.** $X = C([0,1],\mathbb{R}) = \{$ 連続関数 $[0,1]\to\mathbb{R}\}$ 上の距離

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

を考える. 距離空間 (X, d_∞) は完備だが, 距離空間 (X, d_1) は完備でないことを示せ.

問題 **2.** コンパクト空間は正規であることを示せ.

問題 **3.** 距離空間 $\mathbb{R}^n$ の部分距離空間 A については, 有界であることと全有界であることは同値であることを示せ.

問題 **4.** $m \geq 1$ を自然数とする. $\mathbb{R}^m$ の開集合の基本系で可算個のを *1* つ求めよ.

問題 **5.** $(X_n, d_n)_n$ を距離空間の列とする. 積 $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ とおき関数 $d : X\times X \to \mathbb{R}$ を

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = \max_{n\in\mathbb{N}} \min(d_n(x_n, y_n), \frac{1}{n})$$

で定めると, これは X 上の距離でその定める位相は X の積位相となることを示せ.

問題 **6.** $\mathbb{R}$ 上の距離で, それが定める位相はふつうの位相だが, それに関して $\mathbb{R}$ が完備とならないものを一つ与えよ.

問題 **7.** X が第 *2* 可算公理を満たすなら X は可分であることを示せ.

0113

集合と位相 演習 問題略解 (1998.1.13)

1. d_∞: 関数列 $(f_n)_n$ が距離 d_∞ で収束するとは一様収束すること．関数列 $(f_n)_n$ が Cauchy 列だったとすると, 各 $f_n(x)$ は Cauchy 列でその極限を $f(x)$ とおくと関数 f は連続で $(f_n)_n$ は f に一様収束する.

d_1: 関数列 $(f_n)_n$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2n(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le x \le 1 \end{cases}$$

と定めると, これは Cauchy 列だが収束列でない.

2. A, B をコンパクト空間 X の閉集合で $A \cap B = \emptyset$ とする．X が正則であることは講義でやったので, 各 $x \in A$ にたいし開集合 U_x, V_x で $x \in U_x, B \subset V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$ であるものがとれる．有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$ で $A \subset U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ となるものをとり, $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ とおけばよい.

3. 一般に全有界なら有界だから有界集合 A が全有界なことをいえばよい．A の閉包 $\bar{A}$ は有界閉集合でコンパクト．$\{U_\epsilon(a) \cap \bar{A}\}_{a \in A}$ は $\bar{A}$ の開被覆だから有限部分被覆をもつ.

4. $\{U_{\frac{1}{n}}(a)\}_{(n,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^n}$

5. d_n を同値な距離 $(d_n)_{\frac{1}{n}}$ でおきかえて, はじめから $d_n(x, y) \le \frac{1}{n}(x, y \in X_n)$ としてよい.

d が定義されること: $x = y$ なら $d(x, y) = 0$. $x \ne y$ とし, $x_n \ne y_n$ だったとすると $d_m(x_m, y_m) \ge d_n(x_n, y_n)$ となる m は有限個だから, $d(x, y)$ は定義され $\ge d_n(x_n, y_n) > 0$ となる.

d が距離となること: 条件 1 はもうやった．2(対称性) は各 d_n の対称性から従う．3(三角不等式) を示す．$x = (x_n)_n, y = (y_n)_n, z = (z_n)_n, \in X$ とすると,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max_{n \in \mathbb{N}} d_n(x_n, z_n) \le \max_{n \in \mathbb{N}} (d_n(x_n, y_n) + d_n(y_n, z_n)) \\ &\le \max_{n \in \mathbb{N}} d_n(x_n, y_n) + \max_{n \in \mathbb{N}} d_n(y_n, z_n) = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

位相が積位相であること: 射影 $pr_n : X \to X_n$ は X の距離 d が定める位相に関して連続だからこれは積位相より強い．逆に $\epsilon > 0, x = (x_n)_n \in X$ とすると,

$$U_\epsilon(x) = \prod_{n \le \frac{1}{\epsilon}} U_{\epsilon_n}(x_n) \times \prod_{n > \frac{1}{\epsilon}} X_n$$

は積位相で開集合だから両位相は一致する.

6. 同相写像

$$\mathbb{R} \to (-1, 1) : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

で $(-1, 1)$ の距離を引き戻せばよい．$d(x, y) = |\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}|$.

7. $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を開集合の基本系とする．各 U_n は空でないとしてよいので, $a_n \in U_n$ をとる．すると $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ は密.

0120

集合と位相 演習 問題 (1998.1.20)

問題

$$l^2 = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \text{は収束する}\}$$

とおく。$x = (x_n)_n \in l^2$ にたいし、

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}$$

とおく。

1. 写像 $d_2 : l^2 \times l^2 \to \mathbb{R}$ を $d_2(x, y) = |x - y|_2$ とさだめると、これは l^2 上の距離であることを示せ。

以下の問いでは l^2 の位相は距離 d_2 で定まるものとする。

2. l^2 は完備距離空間であることを示せ。

3. 有界閉集合

$$\{x \in l^2 || x| \leq 1\}$$

はコンパクトでないことを示せ。

4. V を l^2 の部分線型空間とする。部分位相空間 V が局所コンパクトであることと、V が線型空間として有限次元であることとは同値であることを示せ。

5. l^2 の基底で可算集合であるものは存在しないことを示せ。

6.

$$\begin{aligned} l^1 =& \{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \text{ は収束する }\}, \\ l^\infty =& \{x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} || x_n | \text{ は有界 }\} \end{aligned}$$

とおく。$l^1 \subset l^2 \subset l^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ であり、どの包含関係も等号ではないことを示せ。

7. 関数

$$\begin{aligned} d_1 : l^1 \times l^1 \to \mathbb{R} : d_1(x, y) = \sum_n |x_n - y_n|, \\ d_\infty : l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R} : d_\infty(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| \end{aligned}$$

は、それぞれ距離であることを示せ。

8. l^1 に d_1 が定める位相, l^2 に d_2 が定める位相, l^∞ に d_∞ が定める位相, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に積位相を考える. 6. の包含関係で真部分空間に導入された位相はその部分空間の元の位相より真に弱いことを示せ.

集合と位相 演習 問題略解 (1998.1.20)

1. $(x-y)^2 \le x^2+y^2$ を使って $d_2(x,y)$ が定義できることを示せる。あとは距離の公理を確かめればよい。三角不等式は有限次元の場合の極限をとればよい。

2. l^2 の点列 $(x_n)_n$ が Cauchy 列と仮定して、これが収束することを示す。$x_n = (x_{n,m})_m$ とすると、各 m にたいし $(x_{n,m})_n$ も Cauchy 列となるから収束する。その極限を $x_{\infty,m}$ とおき、$x=(x_{\infty,m})_m$ とおく。$x \in l^2, x_n \to x (n \to \infty)$ を示せばよい。Cauchy 列は有界列だから、$|x_n| < M$ となる $M>0$ がとれる。

$$\sum_{m=0}^{k} x_{n,m}^2 \to \sum_{m=0}^{k} x_{\infty,m}^2 \le M \quad (n \to \infty),$$
$$\sum_{m=0}^{k} x_{\infty,m}^2 \to \sum_{m=0}^{\infty} x_{\infty,m}^2 \le M (k \to \infty)$$

となるから $x \in l^2$. 同様にして $|x_n - x| \to 0 (n \to \infty)$ も示されるから、l^2 は完備。

3. 点列コンパクトでないことをいえばよい。$e_n \in l^2$ を第 n 成分だけが 1 でほかは 0 という元とすると、点列 $(e_n)_n$ は $d_2(e_n, e_m) = \sqrt{2}\delta_{n,m}$ だから収束する部分列を持たない。

4. 有限次元なら Schmidt の直交化により正規直交基底がとれるから $\mathbb{R}^n$ と同相。無限次元なら無限正規直交列 $(e_n)_n$ がとれ、これは収束する部分列を持たない。したがって $A = \{x \in l^2 | |x| \le 1\}$ はコンパクトでない。V での 0 の任意の開近傍 U は A と同相な V の閉集合を含むから、U を含むコンパクト集合は存在しない。

5. 存在したとして矛盾を導く。Schmidt の直交化により、正規直交基底 $(e'_n)_n$ が作れる。$a=(a_n)_n \in l^2$ とすると、$x = \sum_n a_n e'_n \in l^2$ となるが、すべての n に対し $a_n \ne 0$ となるようにとっておくと（たとえば $a_n = \frac{1}{n}$) x は e_n の線型結合としては表わされないので矛盾。

6. $x=(x_n)_n \in l^1$ なら $x_n \to 0 (n\to\infty)$ だから $n \to \infty$ のとき $x_n^2 < |x_n|$。よって $l^1 \subset l^2$. いまと同様に $l^2 \subset l^\infty$. $(\frac{1}{n})_n \notin l^1, \in l^2; (1)_n \notin l^2, l^\infty; (n)_n \notin l^\infty, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

7. 1 と同様。

8. $x,y \in l^2$ なら $d_\infty(x,y) \le d_2(x,y)$, $x,y \in l^1$ なら $d_2(x,y) \le d_1(x,y)$ であり, 一様収束すれば各点収束するから “真に” 除いたものはよい。

l^1 の点列 $(x_n)_n$ を $x_n = (x_{n,m})_m, x_{n,m} = 1 (m=n), 0 (m \ne n)$ で定めると、$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ では $\lim_n x_n = 0$ だが l^∞ では収束しない。

l^1 の点列 $(x_n)_n$ を $x_n = (x_{n,m})_m, x_{n,m} = \frac{1}{n} (0 \le m < n^2), 0 (n^2 \le m)$ で定めると、l^∞ では $\lim_n x_n = 0$ だが l^2 では収束しない。

l^1 の点列 $(x_n)_n$ を $y_n = (x_{n,m})_m, y_{n,m} = \frac{1}{n} (0 \le m < n), 0 (n \le m)$ で定めると、l^2 では $\lim_n x_n = 0$ だが l^1 では収束しない。

0127

集合と位相 演習 問題 (1998.1.27)

問題 **1.** X を距離空間とし, $x \in X$, $\epsilon > 0$ を正の実数とする.

(1) このとき閉包 $\overline{U_\epsilon(x)}$ は $\{y \in X | d(y,x) \le \epsilon\}$ に含まれることを示せ.
(2) *(1)* の *2* つの集合が一致しない例を与えよ.

問題 **2.** X を距離空間, A をその部分集合とすると A の閉包 $\bar{A}$ は A の点列の X での集積点全体のなす集合と等しい. この事を命題として正確に定式化し, それを証明せよ.

問題 **3.** X, Y を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする. このとき次は同値であることを示せ.

(1) Y の任意の開集合 V にたいし, $f^{-1}(V)$ は X の開集合 *(*講義での連続の定義*)*.
(2) X の任意の部分集合 A にたいし A の閉包 $\bar{A}$ の Y での像 $f(\bar{A})$ は像の閉包 $\overline{f(A)}$ に含まれる.

問題 **4.** $X = \mathbb{N} \amalg \{\infty\}$ に位相を次のように定める. 「X の部分集合 U が開集合であるとは $\infty \notin U$ かまたは U の補集合が有限集合である」

(1) 開集合の公理が満たされることを確かめよ.
(2) X はコンパクトであることを示せ.

集合と位相 演習 問題略解 (1998.1.27)

1.(1) $X \to \mathbb{R} : y \mapsto d(x,y)$ は連続関数だから $\{y \in X | d(y,x) \le \epsilon\}$ は $U_\epsilon(x)$ を含む閉集合なので $\overline{U_\epsilon(x)} \subset \{y \in X | d(y,x) \le \epsilon\}$.

(2). $X = \{0,1\}, d(0,1) = 1, x = 0, \epsilon = 1$ とすればよい.

2. 命題:「X を距離空間, A をその部分集合とし, $\bar{A}$ を A の閉包とすると

$$\begin{aligned}\bar{A} = \{x \in X | A \text{ の点列 } (x_n)_n \text{ とその部分列 } (x_{k_n})_n \text{ で},\\ (x_{k_n})_n \text{ は } X \text{ の点列として } x \text{ に収束するようなものが存在する } \}\end{aligned}$$

がなりたつ.」

証明: 講義中に

$$\begin{aligned}\bar{A} = \{x \in X | A \text{ の点列 } (x_n)_n \text{ で},\\ (x_n)_n \text{ は } X \text{ の点列として } x \text{ に収束するようなものが存在する } \}\end{aligned}$$

ことを示したので, この右辺と上の右辺が一致することを示せばよい. 下 $\subset$ 上を示すには, 部分列としてそれ自身をとればよい. 上 $\subset$ 下には, その部分列を A の点列と考えればよい.

3. (1) $\Rightarrow$ (2). $A \subset X$ とする. $V = Y - \overline{f(A)}$ とおくと, $F = X - f^{-1}(V) = f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合で A を含むから $F \supset \bar{A}$ したがって

$$f(\bar{A}) \subset f(F) \subset \overline{f(A)}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). V を Y の開集合とする. $A = X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V)$ とおくと, $f(A) \subset= Y - V$ だから $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset Y - V$. したがって $\bar{A} \subset f^{-1}(Y - V) = A$ で A は閉. よって $f^{-1}(V) = X - A$ は開集合.

4. この位相の定義は, 実は離散空間 $\mathbb{N}$ の一点コンパクト化の定義と同じなので, この問題は講義中にもうやっていることになる. 直接示すのもできるが, 次のようにやってもいい.

(1). 上の定義は, 単射

$$f : X = \mathbb{N} \amalg \{\infty\} \to \mathbb{R} : n \mapsto \frac{1}{n}, \infty \mapsto 0$$

により, $\mathbb{R}$ の位相を X に導入して得られる位相の定義と一致する.

(2). 上の単射による像 $Y = \{\frac{1}{n} | n = 1,2,3,\dots\} \cup \{0\}$ は閉区間 $[0,1]$ の閉集合なのでコンパクト. $f : X \to Y$ は同相写像だから X もコンパクト.

0203

集合と位相 演習 問題 (1998.2.3)

問題 **1.** $n \geq 1$ なら S^n が連結なことを示せ.

問題 **2.** $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq 1\}$ は $[0,1]^n$ と同相なことを示せ.

問題 **3.** X を位相空間とし, $A \subset B$ をその部分空間とする. $B \subset \bar{A}$ かつ A が連結ならば, B も連結であることを示せ.

問題 **4.** X を位相空間とし, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ をその連結な部分空間の族で $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を満たすものとする. 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ がなりたつなら X は連結なことを示せ.

問題 **5.** X を位相空間とし次の条件を考える.

(1). X は準コンパクト.

(2). F が条件

i F の元は X の空でない閉集合.

ii 有限個の元 $A_1, \ldots, A_n \in F$ の共通部分 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ は F の元となる.

を満たす集合とすると, その共通部分 $\bigcap_{A \in F} A$ は空集合でない.

このとき *(1)* から *(2)* が導かれることは講義中に示した. 逆に *(2)* から *(1)* を導け.

問題 **6*.** $n \geq 1$ とする. *(1).* $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A^t A = 1, \det A = 1\}$ は連結であることを示せ. *(2).* $GL_n(\mathbb{R})^+ = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det A > 0\}$ は連結であることを示せ.

集合と位相 演習 問題略解 (1998.1.27)

1. 講義中に話したのは問題 2 と問題 4 から導くというもの. S^n が $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化であることを思い出せば, 問題 3 からも導ける.

2. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq 1\}$ は

$$[-1,1]^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | |x|_\infty = \max_i |x_i| \leq 1\}$$

と同相なことを示せばよい.

$$D_n \to [-1,-1]^n : x \mapsto \begin{cases} \frac{|x|}{|x|_\infty} x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$[-1,-1]^n \to D_n \to : x \mapsto \begin{cases} \frac{|x|_\infty}{|x|} x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

とおけば, これらは互いに逆写像であるような連続写像.

3. U を X の開集合とすると $A \cap U = \emptyset$ と $B \cap U = \emptyset$ とは同値. X の開集合 U_1, U_2 について, $B = (B \cap U_1) \amalg (B \amalg U_2)$ とすると $A = (A \cap U_1) \amalg (A \amalg U_2)$ なので上のことからわかる.

4. $X = U_1 \amalg U_2$ のように開集合で分割されたとする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda = (A_\lambda \cap U_1) \amalg (A_\lambda \cap U_2)$ となるので, A_λ の連結性より, $A_\lambda \subset U_1$ または $A_\lambda \subset U_2$ のどちらかがなりたつ. $\Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda | A_\lambda \subset U_i\}$ とおくと $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ である. $\lambda_i \in \Lambda_i$ とすると $\emptyset \neq A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となって矛盾が得られるから, Λ_i のどちらか一方は空集合である. $\Lambda_2 = \emptyset$ とすると $U_1 \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = X$. 逆の場合も同様だから X が連結であることが示された.

5. $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする.

$$F = \{X - \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i} | \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \text{ は } \Lambda \text{ の有限部分集合 }\}$$

とおく. $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は開被覆だから $\bigcap_{A \in F} A = \emptyset$. したがって F は (2) の仮定 ii と結論の否定を満たすから, 仮定の i を満たせない. 従って $X - \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i} = \emptyset$ つまり $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ を満たす Λ の有限部分集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ が存在する.

6.(1). n に関する帰納法で示す. $n = 1$ なら明らか. $n \geq 2$ として, $n-1$ で成り立つと仮定する. $A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ により $SO_{n-1} \subset SO_n$ と考える. 連続写像 $SO_n \to S^{n-1} : A \mapsto Ae_1$ を考える. これは連続全射で像 S^{n-1} は問題 1 により連結. $x \in S^{n-1}$ の逆像は, $Be_1 = x$ となる $B \in SO_n$ をとると, SO_{n-1} の B による共役 $\{BAB^{-1} | A \in SO_{n-1}\}$ だから, 帰納法の仮定により連結. SO_n はコンパクトだから S^{n-1} の位相は, 連続全射 $SO_n \to S^{n-1}$ による商位相. 従って講義中の命題により, SO_n も連結.

(2). $GL_n(\mathbb{R})^+ = SO_n \times \{$ 対角成分が真に正であるような上三角行列 $\}$ となり, 右辺の各成分は連結.

shu

追加問題. n を自然数とする。$X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ に同値関係を

$$x \sim y \text{ とは } \lambda x = y \text{ を満たす } 0 \text{ でない実数 } \lambda \in \mathbb{R}, \neq 0 \text{ が存在すること}$$

と定義する。この同値関係 $\sim$ による X の商集合のことを n 次元実射影空間とよび $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ で表す。

(1) $0 \geq i \geq n+1$ に対し $U_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ を $\{x = (x_j)_j \in \mathbb{R}^n | x_i \neq 0\} \subset X$ の像と定義すると、$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^{n+1} U_i$ であることを示せ。

(2) $x = (x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に

$$j_i(x) = (x_0, \cdots, x_{i-1}, 1, x_i, \cdots, x_n)$$

の像を対応させる写像 $j_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ は全単射であることを示せ。

. 集合 $X = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ に同値関係を

$(a, b) \sim (c, d)$ とは、$\dfrac{c-a}{\pi} \in \mathbb{Z} d = (-1)^{\frac{c-a}{\pi}} b \overline{(a, b)} \mapsto (\cos 2a + b\cos^2 2a, \sin 2a + b\cos 2a \sin 2a, b \sin 2a) X/\sim$