关西学院大学
KWANSEI GAKUIN UNIVERSITY

Quadratic Gröbner bases of block diagonal matching field ideals and toric degenerations of Grassmannians

大杉英史
関西学院大学理工学部

東京可換環論セミナー　2020年11月16日

東谷章弘氏との共同研究 (arXiv:2010.07104)

Contents

本日の内容

1. Matching field ideal

定義. $r, n \in \mathbb{Z}$,　$2 \le r < n$,　$[n] \coloneqq \{1,2,\dots,n\}$

K：体

$\mathrm{Gr}(r,n)$：K^n の r次元部分空間全体　　Grassmannian

$\mathbf{I}_{r,n} \coloneqq \{I \subset [n] : |I| = r\}$

$S = K[P_I : I \in \mathbf{I}_{r,n}]$ ：K 上の $\binom{n}{r}$ 変数多項式環

$X = (x_{ij})_{1\le i\le r, 1\le j\le n}$ ：$r \times n$ 変数行列

$R = K[x_{ij} : 1 \le i \le r, 1 \le j \le n]$：$K$ 上の rn 変数多項式環

$\psi : S \to R$, $P_I \mapsto \det(X_I)$　環準同型（X_I は I に対応する X の $r \times r$ 部分行列）

$I_{r,n} \coloneqq \mathrm{Ker}(\psi)$ ：Plücker ideal

$A_{r,n} \coloneqq \mathrm{Im}(\psi)$ ：Plücker algebra

1. Matching field ideal

例. $r = 2, n = 5$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \end{pmatrix}$$

このとき，$I_{2,5}$ は以下のような多項式で生成される：

$$P_{\{1,4\}}P_{\{2,3\}} - P_{\{1,3\}}P_{\{2,4\}} + P_{\{1,2\}}P_{\{3,4\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{2,3\}} - P_{\{1,3\}}P_{\{2,5\}} + P_{\{1,2\}}P_{\{3,5\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{2,4\}} - P_{\{1,4\}}P_{\{2,5\}} + P_{\{1,2\}}P_{\{4,5\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{3,4\}} - P_{\{1,4\}}P_{\{3,5\}} + P_{\{1,3\}}P_{\{4,5\}}$$
$$P_{\{2,5\}}P_{\{3,4\}} - P_{\{2,4\}}P_{\{3,5\}} + P_{\{2,3\}}P_{\{4,5\}}$$

Plücker relation

1. Matching field ideal

定義. $\mathfrak{S}_r$：r 次対称群

写像 $\Lambda : \mathbf{I}_{r,n} \to \mathfrak{S}_r$ を $r \times n$ matching field という。

各元 $I = \{i_1, \dots, i_r\} \in \mathbf{I}_{r,n}$　($1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$) に対して，

R の単項式

$$\boldsymbol{x}_{\Lambda(I)} \coloneqq x_{\sigma(1)i_1} \cdots x_{\sigma(r)i_r}$$ （ただし，$\sigma = \Lambda(I) \in \mathfrak{S}_r$）

を対応させ，環準同型

$$\psi_\Lambda : S \to R, \quad \psi_\Lambda(P_I) = \mathrm{sgn}(\Lambda(I))\, \boldsymbol{x}_{\Lambda(I)}$$

を定義する。

このとき，$J_\Lambda \coloneqq \mathrm{Ker}(\psi_\Lambda)$ を matching field ideal という。

1. Matching field ideal

定義. $r \times n$ matching field Λ が coherent

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $r \times n$ 実行列 M が存在して，以下をみたす：

$$\forall I \in \mathbf{I}_{r,n}, \quad \mathrm{in}_M(\det(X_I)) = \psi_\Lambda(P_I)$$ イニシャルフォーム（最小の重み）

●このとき，J_Λ を J_M で表す。

例（diagonal matching field $\Lambda(I) = \mathrm{id}$　$(\forall I \in \mathbf{I}_{r,n})$）

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 2(n-1) & \cdots & 4 & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ (r-1)n-1 & \cdots & 2(r-1) & r-1 & 0 \end{pmatrix}$$ とすると，

各 $I \in \mathbf{I}_{r,n}$ に対して，$\mathrm{in}_M(\det(X_I))$ は主対角になる。

1. Matching field ideal

例. $r=2, n=5$ (diagonal matching)

$$\Lambda(I)=\mathrm{id}\quad(\forall I\in \mathbf{I}_{2,5})\qquad M=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\4&3&2&1&0\end{pmatrix}$$

$X_{\{1,2\}}=x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}$, $X_{\{1,3\}}=x_{11}x_{23}-x_{13}x_{21}$, …

このとき，J_Λ は以下のような多項式で生成される：

$$P_{\{1,4\}}P_{\{2,3\}}-P_{\{1,3\}}P_{\{2,4\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{2,3\}}-P_{\{1,3\}}P_{\{2,5\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{2,4\}}-P_{\{1,4\}}P_{\{2,5\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{3,4\}}-P_{\{1,4\}}P_{\{3,5\}}$$
$$P_{\{2,5\}}P_{\{3,4\}}-P_{\{2,4\}}P_{\{3,5\}}$$

1. Matching field ideal

定義. イデアル $I\subset K[y_1,\dots,y_m]$ と重み $w\in\mathbb{R}^m$ に対して，
w に関するイニシャル退化がトーリック

$\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\underbrace{\mathrm{in}_w(I)}_{\text{イニシャルフォームイデアル}}$ が2項式で生成される素イデアル

$I_{2,5}$

$$P_{\{1,4\}}P_{\{2,3\}}-P_{\{1,3\}}P_{\{2,4\}}+P_{\{1,2\}}P_{\{3,4\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{2,3\}}-P_{\{1,3\}}P_{\{2,5\}}+P_{\{1,2\}}P_{\{3,5\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{2,4\}}-P_{\{1,4\}}P_{\{2,5\}}+P_{\{1,2\}}P_{\{4,5\}}$$
$$P_{\{1,5\}}P_{\{3,4\}}-P_{\{1,4\}}P_{\{3,5\}}+P_{\{1,3\}}P_{\{4,5\}}$$
$$P_{\{2,5\}}P_{\{3,4\}}-P_{\{2,4\}}P_{\{3,5\}}+P_{\{2,3\}}P_{\{4,5\}}$$

J_Λ (Λ は diagonal m.f.)

2. 2-block diagonal（先行結果）

定義. $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_s)\in\mathbb{Z}_{>0}^s$ が $\sum_{i=1}^s a_i=n$ をみたすとする。

$k=1,2,\dots,s$ について，

$$I_k=\{\alpha_{k-1}+1,\alpha_{k-1}+2,\dots,\alpha_k\}=[\alpha_k]\setminus[\alpha_{k-1}]$$

（ただし，$\alpha_0=0, \alpha_k=\sum_{i=1}^k a_i$）とおく。

このとき，$\boldsymbol{a}$ に付随する s-block diagonal matching field $\Lambda_{\boldsymbol{a}}$ を

$$\Lambda_{\boldsymbol{a}}(I)=\begin{cases}(1\ 2) & |I\cap I_q|=1, q=\min\{t: I_t\cap I\neq\emptyset\}\\ \mathrm{id} & \text{その他}\end{cases}$$

で定義する。

2. 2-block diagonal（先行結果）

注意. s-block diagonal matching field $\Lambda_{\boldsymbol{a}}$ は coherent.

対応する重み行列は

$$M=\left(\begin{array}{cccc|ccc|c|cccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\alpha_1 & \alpha_1-1 & \cdots & 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_1+1 & \cdots & \alpha_s & \cdots & \alpha_s+2 & \alpha_s+1\\
n\beta & (n-1)\beta & \cdots & & & & & & & \cdots & 2\beta & \beta\\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots\\
n\beta^{r-2} & (n-1)\beta^{r-2} & \cdots & & & & & & & \cdots & 2\beta^{r-2} & \beta^{r-2}
\end{array}\right)$$

ただし，$\beta\gg 0$.

例 $r=3, n=9, \boldsymbol{a}=(2,2,2,3)$

$$M=\left(\begin{array}{cc|cc|cc|ccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&1&4&3&6&5&9&8&7\\
900&800&700&600&500&400&300&200&100
\end{array}\right)$$

2. 2-block diagonal（先行結果）

定理（Mohammadi-Shaw 2019）$r\times n$ matching field Λ に対して
Λ がトーリック退化を与える $\Rightarrow$ Λ は "non-hexagonal"
さらに，$r=3$ かつ J_Λ が 2 次生成ならば，
Λ がトーリック退化を与える $\Leftrightarrow$ Λ は "non-hexagonal"

定理（Mohammadi-Shaw 2019）$3\times n$ の任意の 2-block diagonal matching field Λ に対して，J_Λ は 2 次生成である。

定理（Clarke-Mohammadi 2020）$r\times n$ の任意の 2-block diagonal matching field Λ に対して，J_Λ は 2 次生成であり，
Λ はトーリック退化を与える。

3. s-block diagonal（主結果）

定理（Higashitani-O. 2020）$\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_s)\in\mathbb{Z}_{>0}^s$ $(s\geq 2)$ が

$$\sum_{i=1}^s a_i=n,\qquad a_i\in\{1,2\}\ (1<i<s)\qquad \cdots\bigstar$$

をみたすとすると，s-block diagonal matching field $\Lambda_{\mathbf{a}}$ に対して
$J_{\Lambda_{\mathbf{a}}}$ は 2 次のグレブナー基底を持ち，$\Lambda_{\mathbf{a}}$ はトーリック退化を与える。

注意　$s=2$ の場合は，★は常に成立する。

- この定理は Clarke-Mohammadi の結果を完全に含んでいる。
- 2 次生成よりも強い主張で，証明も先行研究より簡潔である。

3. s-block diagonal（主結果）

前半部分（２次グレブナー基底の存在）の証明の流れ

$I = \{i_1, \dots, i_r\}$, $i_1 < \cdots < i_r$,　$\sigma = \Lambda(I)$ のとき，
変数 P_I を

$$\Lambda(I) = \mathrm{id} \text{ のとき} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}, \Lambda(I) = (1\ 2) \text{ のとき} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_1 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}$$

と同一視する。

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_2 \\ j_1 \\ j_3 \\ \vdots \\ j_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_2 \\ i_2 \\ j_3 \\ \vdots \\ j_r \end{bmatrix}$$

1. ある逆辞書式順序 $<$ を準備する。
2. ２部グラフの edge ring の結果を使って，
   $s = 2$ の場合に，$<$ に関して２次GBを持つことを証明する。
3. 一般の s の場合に，グレブナー基底をなす２項式を列挙し，
   上の２の結果も用いて，グレブナー基底であることを証明する。

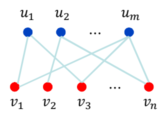
3. s-block diagonal（主結果）

定義 G：有限単純２部グラフ

- つまり，G の頂点集合が $V(G) = U \sqcup V$ と分割され，G の辺集合が $E(G) \subset U \times V$ をみたすとする。
- $U = \{u_1, \dots, u_m\}, V = \{v_1, \dots, v_n\}$ のとき，環準同型

$$\pi_G : K[x_{ij} : \{i, j\} \in E(G)] \longrightarrow K[s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n], \qquad x_{ij} \mapsto s_i\, t_j$$

について，$I_G \coloneqq \mathrm{Ker}(\pi_G)$ を G のトーリックイデアル，
$K[G] \coloneqq \mathrm{Im}(\pi_G)$ を G の edge ring という。



3. s-block diagonal（主結果）

命題（Villarreal 1995）G：２部グラフ
I_G の任意の被約グレブナー基底は以下のような２項式からなる：

$$x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_q j_q} - x_{i_1 j_q} x_{i_2 j_1} \cdots x_{i_q j_{q-1}}$$

ただし，$(u_{i_1}, v_{j_1}, u_{i_2}, v_{j_2}, \dots, u_{i_q}, v_{j_q})$ は G のサイクル。

命題（O.-Hibi 1999）２部グラフ G に対して，以下は同値
① I_G は２次生成，
② I_G は２次グレブナー基底を持つ，
③ G の長さが６以上のサイクルは弦を持つ。

3. s-block diagonal（主結果）

Λ_M：以下の重み行列に付随する $2 \times n$ coherent matching

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_{n-1} & w_n \end{pmatrix} \qquad w_i \neq w_j \text{ for } i \neq j$$

G_M:以下の頂点集合と辺集合を持つグラフ

$$V(G_M) = \{u_1, \dots, u_n\} \sqcup \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$E(G_M) = \left\{\{u_i, v_j\} : w_i > w_j\right\}$$

このとき，$J_{\Lambda_M} = I_{G_M}$ が成り立つ。

3. s-block diagonal（主結果）

また，

$$M_{\mathrm{diag}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，M_{diag} は diagonal matching の重み行列であり，

- $J_{M_{\mathrm{diag}}}$ はある逆辞書式順序に関して２次グレブナー基底を持つ。
- G_M と G_{diag} はグラフとして同型なので，$J_M = J_{M_{\mathrm{diag}}}$

命題．$2 \times n$ の任意の coherent matching field Λ に対して，
J_Λ はある逆辞書式順序に関して２次グレブナー基底を持つ。

3. s-block diagonal（主結果）

命題（HO）$2 \times n$ の s-matching field Λ_a が★をみたすとき，

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} \Leftrightarrow 『i < k』 \text{ or } 『i = k \text{ and } j < \ell』$$

で定義される逆辞書式順序に関して

$$\left\{ \begin{bmatrix} i \\ \ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ \ell \end{bmatrix} \in S \ :\ i < k \text{ and } j < \ell \right\}$$

は J_{Λ_a} のグレブナー基底である。

$r \times n$ の場合に，以下で定義される逆辞書式順序を考える：

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_r \end{bmatrix} \Leftrightarrow i_k = j_k \text{ for } k = 1, \dots, t-1 \text{ and } i_t < j_t$$

3 . s-block diagonal（主結果）

グレブナー基底

(i) $\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j_1\\ j_2\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} \in S \mathit{\ and\ } i_1 < j_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1\\ j_2\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_1\\ i'_2\\ i'_3\\ \vdots\\ i'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1\\ j'_2\\ j'_3\\ \vdots\\ j'_r \end{bmatrix} \in J_{\Lambda_{\mathbf{a}}},$

(ii) $\begin{bmatrix} i_2\\ i_1\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j_1\\ j_2\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} \in S \mathit{\ and\ } i_2 < j_1 \Longrightarrow \begin{bmatrix} i_2\\ i_1\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1\\ j_2\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_2\\ i_1\\ i'_3\\ \vdots\\ i'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1\\ j_2\\ j'_3\\ \vdots\\ j'_r \end{bmatrix} \in J_{\Lambda_{\mathbf{a}}},$

(iii) $\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} \in S \mathit{\ and\ } \begin{matrix} i_1 < j_2\\ i_2 < j_3 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i'_3\\ \vdots\\ i'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j'_3\\ \vdots\\ j'_r \end{bmatrix} \in J_{\Lambda_{\mathbf{a}}},$

$$\begin{gathered} 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n,\\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n,\\ i'_k = \min\{i_k, j_k\} \ \mathit{for}\ k = 1, \dots, r,\\ j'_k = \max\{i_k, j_k\} \ \mathit{for}\ k = 1, \dots, r. \end{gathered}$$

⋮

3 . s-block diagonal（主結果）

グレブナー基底

(iv) $\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} \in S \mathit{\ and\ } \begin{matrix} i_1 < j_2\\ j_3 \le i_2 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_1\\ j_1\\ i'_3\\ \vdots\\ i'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2\\ i_2\\ j'_3\\ \vdots\\ j'_r \end{bmatrix} \in J_{\Lambda_{\mathbf{a}}},$

(v) $\begin{bmatrix} i_2\\ i_1\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} \in S \mathit{\ and\ } i_2 < j_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} i_2\\ i_1\\ i_3\\ \vdots\\ i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j_3\\ \vdots\\ j_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_2\\ i_1\\ i'_3\\ \vdots\\ i'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_2\\ j_1\\ j'_3\\ \vdots\\ j'_r \end{bmatrix} \in J_{\Lambda_{\mathbf{a}}},$

(vi) $\begin{bmatrix} \ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\\ \vdots\\ \ell_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \ell_1\\ m_2\\ m_3\\ \vdots\\ m_r \end{bmatrix} \in S \mathit{\ and\ } \begin{matrix} \ell'_k = \min\{\ell_k, m_k\}\\ m'_k = \max\{\ell_k, m_k\}\\ \\ \mathit{for}\ k = 2, 3, \dots, r \end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\\ \vdots\\ \ell_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1\\ m_2\\ m_3\\ \vdots\\ m_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1\\ \ell'_2\\ \ell'_3\\ \vdots\\ \ell'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1\\ m'_2\\ m'_3\\ \vdots\\ m'_r \end{bmatrix} \in J_{\Lambda_{\mathbf{a}}},$

(vii) $\begin{bmatrix} \ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\\ \vdots\\ \ell_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_1\\ m_2\\ m_3\\ \vdots\\ m_r \end{bmatrix} \in S \mathit{\ and\ } \begin{matrix} w_{\ell_1} > w_{m_2},\\ w_{m_1} > w_{\ell_2}\\ \ell_1 < m_1,\\ m_2 < \ell_2,\\ \ell_k \le m_k \ \mathit{for}\ k \ge 3 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\\ \vdots\\ \ell_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1\\ m_2\\ m_3\\ \vdots\\ m_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1\\ m_2\\ \ell_3\\ \vdots\\ \ell_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1\\ \ell_2\\ m_3\\ \vdots\\ m_r \end{bmatrix} \in J_{\Lambda_{\mathbf{a}}}.$

$$\begin{gathered} 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n,\\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n,\\ i'_k = \min\{i_k, j_k\} \ \mathit{for}\ k = 1, \dots, r,\\ j'_k = \max\{i_k, j_k\} \ \mathit{for}\ k = 1, \dots, r. \end{gathered}$$

3 . s-block diagonal（主結果）

後半部分（トーリック退化）の証明の概要

定義. $\{X_I : I \in \mathbf{I}_{r,n}\} \subset R$ が重み行列 M に関する $A_{r,n}$ のSAGBI 基底

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall I \in \mathbf{I}_{r,n}$ に対して，$\mathrm{in}_M(X_I)$ が単項式で，

$$\mathrm{in}_{w_M}(A_{r,n}) = K[\mathrm{in}_M(X_I) : I \in \mathbf{I}_{r,n}]$$

ただし，w_M は重み行列 M に付随する P_I たちへの重みである。

定理. $\{X_I : I \in \mathbf{I}_{r,n}\} \subset R$ が重み行列 M に関する $A_{r,n}$ のSAGBI 基底

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{in}_{w_M}(I_{r,n}) = J_M$

$\Rightarrow$ Λ_M はトーリック退化を与える

3 . s-block diagonal（主結果）

$A_{\boldsymbol{a}} \coloneqq S/J_{\Lambda_{\boldsymbol{a}}}$:coherent matching field $\Lambda_{\boldsymbol{a}}$ に付随する toric ring

$A_0 \coloneqq A_{(n)}$ （つまり diagonal m.f. の toric ring）

$[A_{\boldsymbol{a}}]_2 : A_{\boldsymbol{a}}$ の次数 2 の元によって生成される，$A_{\boldsymbol{a}}$ の K-部分空間

補題（HO） $r \times n$ の s-matching field $\Lambda_{\boldsymbol{a}}$ に対して，

$$\dim_K([A_{\boldsymbol{a}}]_2) = \dim_K([A_0]_2)$$

注：この補題については，条件 ★ は不要である。

- この補題と，$J_{\Lambda_{\boldsymbol{a}}}$ が 2 次生成という事実から，

  Clarke-Mohammadi の議論が適用可：

$$H \coloneqq \underset{H\text{ の極小生成系}}{\langle \mathrm{in}(g_1), \dots, \mathrm{in}(g_s) \rangle} \subset \mathrm{in}_{w_M}(I_{r,n}) \subset J_M$$

（ただし，s は $I_{r,n}$ と J_M の生成元の数，$g_1, \dots, g_s \in I_{r,n}$は 2 次式）

参考文献

1. O. Clarke and F. Mohammadi, Toric degenerations of Grassmannians and Schubert varieties from matching field tableaux, *J. Algebra* **559** (2020), 646-678.
2. A. Higashitani and H. Ohsugi, Quadratic Gröbner bases of block diagonal matching field ideals and toric degenerations of Grassmannians. arXiv:2010.07104.
3. F. Mohammadi and K. Shaw, Toric degenerations of Grassmannians from matching fields, *Algebraic Combinatorics* **2** (2019) 1109-1124.
4. B. Sturmfels and A. Zelevinsky, Maximal minors and their leading terms, *Adv. Math.* **98** (1993), 65-112.

ご清聴ありがとうございました！