

The distance from a projection to nilpotents*[†]

森 迪也[‡] (東大数理/理研 iTHEMS)

概要

階数 $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ の $n \times n$ 直交射影行列と $n \times n$ ベキ零行列全体の距離は $(2 \cos \frac{\pi}{\frac{n}{m} + 2})^{-1}$ である。

1 はじめに

この講演は泉正己氏（京都大）との共同研究 [8] に基づく¹。本稿全体を通じ、 n を（固定され

た）正の整数とする。ベクトル $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し、 $\|h\| = \sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2 + \dots + |h_n|^2}$

と定める。複素 $n \times n$ 行列全体を $\mathcal{M}_n$ と表す。 $A \in \mathcal{M}_n$ に対し、 $\|A\| := \sup_{h \in \mathbb{C}^n, \|h\| \leq 1} \|Ah\|$ と定める。 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ に対し、第 (i, i) 成分が a_i ($1 \leq i \leq n$) である $n \times n$ 対角行列を $\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ と表す。 $n \times n$ ベキ零行列全体を $\mathcal{N}_n$ と表す。

次が本講演における主定理である。

定理 1 ([8]). $1 \leq m \leq n$ とする。 $P_m := \text{Diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m \text{ 個}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m \text{ 個}})$ に対し

$$\inf_{N \in \mathcal{N}_n} \|P_m - N\| = \left(2 \cos \frac{\pi}{\frac{n}{m} + 2} \right)^{-1}$$

が成り立つ。

3 節・4 節において、(定理 7 を例外として) ほぼ自己完結な形でこの証明を与えたい。論文 [8] にはより一般的な結果が書かれているが、それについては 5 節で説明する。

2 背景

定理 1 への動機を説明しよう²。(可分) 複素 Hilbert 空間 H, K に対し、 H から K への有界線形作用素全体を $\mathcal{B}(H, K)$ と表す。 $A \in \mathcal{B}(H, K)$ に対し、

$$\|A\| (= \|A\|_{\mathcal{B}(H, K)}) := \sup_{h \in H, \|h\| \leq 1} \|Ah\|$$

*2024 年度 実函数論・函数解析学合同シンポジウム 講演集原稿

[†]講演者は科研費（課題番号 22K13934）による助成を受けている。

[‡]mmori@ms.u-tokyo.ac.jp

¹が、行列の場合を主として扱うため、[8] より議論を簡略化した箇所や、逆に議論を丁寧に書いた箇所が多々ある。

²本節の内容の一部は [11] と重複している。説明がやや粗い部分があるがご容赦いただきたい。続く 3 節・4 節では行列の場合しか考えない。

と定めると、 $\mathcal{B}(H, K)$ はノルム $\|\cdot\|$ について Banach 空間をなす。このノルムは距離 $d(A, B) := \|A - B\|$ ($A, B \in \mathcal{B}(H, K)$) を定め、この距離から $\mathcal{B}(H, K)$ の位相（ノルム位相）が定まる。 $A \in \mathcal{B}(H, K)$ に対し、 $\langle A^*k, h \rangle = \langle k, Ah \rangle$ ($h \in H, k \in K$) なる $A^* \in \mathcal{B}(K, H)$ が唯一つ存在し、 $\|A^*\|_{\mathcal{B}(K, H)} = \|A\|_{\mathcal{B}(H, K)}$, $\|A^*A\|_{\mathcal{B}(H, H)} = \|A\|_{\mathcal{B}(H, K)}^2$ が成り立つ。

以下、主として $H = K$ の場合を考える。 $\mathcal{B}(H, H)$ を $\mathcal{B}(H)$ と表す。 $\mathcal{B}(H)$ は合成を積として Banach 環をなす ($\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ が成り立つ)。 $\mathcal{B}(H)$ の単位元は H 上の恒等作用素である。これを $I_{\mathcal{B}(H)}$ あるいは I と表すことにする。 $n = \dim H < \infty$ のとき、 H から $\mathbb{C}^n$ への（線形等距離）同型写像をひとつとれば、通常の方法により、 $\mathcal{B}(H)$ は $n \times n$ 複素行列全体のなす空間 $\mathcal{M}_n$ と同一視される。このような同一視について、前節で定めた行列のノルムは本節で定めた作用素のノルムと一致する。

作用素 $N \in \mathcal{B}(H)$ に対し、ある正の整数 k が存在して $N^k = 0$ が成り立つとき、 N は**ベキ零** (nilpotent) であるという。 $\mathcal{B}(H)$ のベキ零な元全体の集合を $\mathcal{N}(H)$ と表す。 $A \in \mathcal{B}(H)$ に対し、 A と $\mathcal{N}(H)$ の距離 $\inf_{N \in \mathcal{N}(H)} \|A - N\|$ を $\nu(A)$ と表すことにする。線形代数で学ぶように、 $N \in \mathcal{M}_n$ がベキ零であることは $N^n = 0$ であることと同値である。したがって、 $n \times n$ ベキ零行列の全体 $\mathcal{N}_n$ は $\mathcal{M}_n$ の閉集合である。これよりとくに、 $A \in \mathcal{M}_n$ に対し、 $\nu(A) = 0$ であることは $A \in \mathcal{N}_n$ であることと同値である。

いっぽう、 $\dim H = \infty$ の場合は、ベキ零作用素全体の集合は閉集合ではない。作用素 $A \in \mathcal{B}(H)$ に対し、スペクトル $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ は可逆でない}\}$ を $\sigma(A)$ で表す。 $A \in \mathcal{B}(H)$ のスペクトル $\sigma(A)$ が一点集合 $\{0\}$ であるとき、 A は**準ベキ零** (quasinilpotent) であるという。Gelfand のスペクトル半径公式³から、 A が準ベキ零であることは $\|A^k\|^{1/k} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となることと同値である。とくに、ベキ零作用素は準ベキ零である。

作用素論に関する Paul Halmos の有名な 10 の問題 [5] の第 7 問は、任意の準ベキ零作用素は $\mathcal{N}(H)$ の閉包に属するか、という問題である。この問題は肯定的に解かれており、より強い以下の定理が知られている。

定理 2 (Apostol, Foiaş, Voiculescu [1]). $A \in \mathcal{B}(H)$ が $\mathcal{N}(H)$ の閉包に属する（すなわち $\nu(A) = 0$ となる）ためには次の 3 条件が成り立つことが必要十分である。

1. A のスペクトルは 0 を含み、連結である。
2. A の本質的スペクトル⁴は 0 を含み、連結である。
3. $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、 $\lambda I - A$ が semi-Fredholm ならば $\lambda I - A$ の Fredholm index は 0 である⁵。

ベキ零作用素への理解を（「外側」から）もっと深めるために、 ν の具体的な値をさらに調べよう、と考えることは自然な発想であろう。ところが、それはどうやら易しくないらしく、 ν の具体的な値が知られている作用素は、 ν がゼロの場合（上記）を除き、 H が有限次元でも無限次元でもかなり限定的である。 ν の値に関し知られているいくつかの事実を以下に述べる。

- 任意の $A, B \in \mathcal{B}(H)$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、 $\nu(\lambda A) = |\lambda|\nu(A)$, $\nu(A) = \nu(A^*)$, $|\nu(A) - \nu(B)| \leq \|A - B\|$ である（定義より明らか）。

³ $A \in \mathcal{B}(H)$ ならば、 $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$ である。この値を**スペクトル半径**という。

⁴ $A \in \mathcal{B}(H)$ が Fredholm であるとは、 A の像が閉で、 $\dim \ker A < \infty$ かつ $\dim \ker A^* < \infty$ であることを意味する。 A の**本質的スペクトル**とは、 $\lambda I - A$ が Fredholm でない $\lambda \in \mathbb{C}$ の全体を表す。

⁵これはつまり次を意味する。 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し、 $\lambda I - A$ の像が閉で、 $\dim \ker(\lambda I - A) < \infty$ あるいは $\dim \ker(\lambda I - A)^* < \infty$ であるならば、 $\dim \ker(\lambda I - A) = \dim \ker(\lambda I - A)^*$ である。

- $U \in \mathcal{B}(H)$ が等距離作用素 ($U^*U = I$) ならば, $\nu(U) = 1$ である. ($\nu(U) \leq 1$ は明らか. $N \in \mathcal{N}(H)$ ならば, $h \in \ker N (\neq \{0\})$ に対し $\|(U - N)h\| = \|Uh\| = \|h\|$ となるため, $\nu(U) \geq 1$ である.)
- (Apostol–Salinas [2, Theorem 3.5]) 任意の $A \in \mathcal{B}(H)$ に対し, $\nu(A)$ は A のスペクトル半径以下である.

$P \in \mathcal{B}(H)$ が射影 (projection) であるとは, $P = P^2 = P^*$ であることを指す. $\mathcal{B}(H)$ の射影全体の集合を $\mathcal{P}(H)$ と表す. また, $\mathcal{M}_n$ の射影全体の集合を $\mathcal{P}_n$ と表し, $\mathcal{P}_n$ の元で階数が m であるものの全体を $\mathcal{P}_{n,m}$ と表す. $P_m = \text{Diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m \text{ 個}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m \text{ 個}}) \in \mathcal{P}_{n,m}$ である. また, $P \in \mathcal{P}_{n,m}$ ならば, あるユニタリ行列 $U \in \mathcal{M}_n$ が存在して $UPU^* = P_m$ となることにも注意. よって, 任意の $P \in \mathcal{P}_{n,m}$ に対し $\nu(P) = \nu(P_m)$ である. 射影は基本的な作用素であるが, 射影の場合に限っても ν の完全な理解は以前まで得られていなかった. 先行研究をまとめてみよう.

- 射影に対する ν の値の評価を与えた最も古い研究はおそらく [6] である. この論文で著者の Hedlund は, 零でない射影全体の集合と $\mathcal{N}(H)$ の距離について “the determination of the precise value (中略) seems difficult, even if H is finite-dimensional” と述べている.
- (Herrero [7, Corollary 9]) $\dim H = \infty$ のとき, $P \in \mathcal{P}(H) \setminus \{0\}$ の核が無限次元なら $\nu(P) = 1/2$, 有限次元なら $\nu(P) = 1$ である.
- (MacDonald [9, Theorem 1]) $P \in \mathcal{P}_{n,1}$ ならば, $\nu(P) = (2 \cos \frac{\pi}{n+2})^{-1}$ である.
- (Cramer [4, Theorem 3.6]) $n \geq 2$, $P \in \mathcal{P}_{n,n-1}$ ならば, $\nu(P) = (2 \cos \frac{\pi}{\frac{n}{n-1}+2})^{-1}$ である.

MacDonald [9] は, 任意の $P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$ に対し $\nu(P) \geq (2 \cos \frac{\pi}{n+2})^{-1}$ が成り立つと予想した. 講演者は MacDonald の予想に証明を与えた [10, 11]. Cramer [4, Conjecture 5.1] は $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $P \in \mathcal{P}_{n,m}$ ならば $\nu(P) = (2 \cos \frac{\pi}{\frac{n}{m}+2})^{-1}$ であると予想した. 定理 1 はこの予想を証明した結果に他ならない.

3 準備

主定理について考えるための準備として, 行列に関するいくつかの事実を述べよう. 読者の面倒を避けるため, 証明もかんたんにつけることにしたい.

行列 $A \in \mathcal{M}_n$ に対し, そのトレースを $\text{tr } A$, 行列式を $\det A$, 階数を $\text{rank } A$ と表す. A のスペクトル $\sigma(A)$ は A の固有値全体, すなわち固有多項式の根全体の集合に他ならない. また, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ に対し $A^* = (\overline{a_{ji}})_{1 \leq i,j \leq n}$ である. A がエルミート行列 ($A = A^*$) のとき, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ が成り立つ. エルミート行列 A の固有値がすべて 0 以上であるとき, A は**正**であるという. エルミート行列 A, B に対し, $B - A$ が正であるとき, $A \leq B$ と書く. この条件は, 任意の $h \in \mathbb{C}^n$ に対し $\langle Ah, h \rangle \leq \langle Bh, h \rangle$ となることと同値である. したがって, $\leq$ は半順序関係となる. また, 可逆行列 $X \in \mathcal{M}_n$ に対し

$$A \leq B \iff X^*AX \leq X^*BX \quad (1)$$

であることもわかる. エルミート行列 A, B に対し, $B - A$ が正かつ可逆であるとき, $A < B$ と書くことにする.

一般に、行列 X に対し、 X^*X, XX^* は正である。また、正行列のノルムは最大固有値に等しい。ゆえに

$$\begin{aligned} \|X\| \leq 1 &\iff \|X^*X\| \leq 1 \iff X^*X \leq I \\ &\iff \|X^*\| \leq 1 \iff \|XX^*\| \leq 1 \iff XX^* \leq I \end{aligned} \quad (2)$$

が成り立つ。

エルミート行列 $A \in \mathcal{M}_n$ の固有値が（重複度を込めて） $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ であるとき、あるユニタリ行列 $U \in \mathcal{M}_n$ が存在して、 $A = U \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^*$ が成り立つ。関数 $f: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ に対し、 $f(A) = U \text{Diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)) U^*$ と定める⁶ (**functional calculus**)。 f の像が $\mathbb{R}, [0, \infty), \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ に含まれるとき、 $f(A)$ はそれぞれエルミート、正、ユニタリとなることに注意しておく。 $0 \leq A$, $f(t) = t^{1/2}$ のとき、 $f(A) = A^{1/2}$ を A の（正の）**平方根**という。 次の2つの定理はどちらも有名である。

定理 3. $A, B \in \mathcal{M}_n$ とする。このとき、 AB の固有多項式は BA の固有多項式と一致する。

証明. A が可逆のときは $BA = A^{-1}(AB)A$ より明らか。一般の場合、十分小さい任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し、 $A + \varepsilon I$ は可逆なので $\det(xI - (A + \varepsilon I)B) = \det(xI - B(A + \varepsilon I))$ が成り立つ。 $\varepsilon \rightarrow 0$ という極限⁷を考えれば $\det(xI - AB) = \det(xI - BA)$ であることがわかる。 $\square$

定理 4. エルミート行列 $A, B \in \mathcal{M}_n$ が正・可逆であるとする。このとき、 $A \leq B$ と $B^{-1} \leq A^{-1}$ は同値である。

証明. $A \leq B \xLeftrightarrow{(1)} B^{-1/2}AB^{-1/2} \leq I \xLeftrightarrow{(2)} A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \leq I \xLeftrightarrow{(1)} B^{-1} \leq A^{-1}$. $\square$

行列解析の理論において基本的な **min-max 定理**を思い出そう。

定理 5 (min-max 定理). $A \in \mathcal{M}_n$ をエルミート行列、 $1 \leq k \leq n$ とする。このとき、 A の（重複度を込め） k 番目に大きい固有値 λ_k について次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \max\{\min\{\langle Ah, h \rangle \mid h \in V, \|h\| = 1\} \mid V \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の } k \text{ 次元部分空間}\} \\ &= \min\{\max\{\langle Ah, h \rangle \mid h \in V, \|h\| = 1\} \mid V \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の } n - k + 1 \text{ 次元部分空間}\}. \end{aligned}$$

証明. ひとつめの等号を示す。ふたつめの等号の証明も同様である。 A をユニタリ行列により対角化することで、 $A = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ の場合に帰着できる。

($\geq$ の証明) k 番目より前の成分がすべてゼロであるベクトル全体 $W \subset \mathbb{C}^n$ の次元は $n - k + 1$ である。よって、 $V \subset \mathbb{C}^n$ を k 次元部分空間とすると、 $V \cap W \neq \{0\}$ である。ノルム 1 のベクトル $h \in V \cap W$ をとれば、 $h \in W$ より $\langle Ah, h \rangle \leq \lambda_k$ が従う。

($\leq$ の証明) k 番目より後の成分がすべてゼロであるベクトルの全体を $V \subset \mathbb{C}^n$ とおけば、 $\min\{\langle Ah, h \rangle \mid h \in V, \|h\| = 1\} = \lambda_k$ が成り立つ。 $\square$

補題 1. エルミート行列 $X, Y \in \mathcal{M}_n$ が $X \leq Y$ を満たすと仮定する。関数 $f: \sigma(X) \cup \sigma(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ が単調減少なら、 $\text{tr}(f(X)) \geq \text{tr}(f(Y))$ である。もしさらに f が単射で $X \neq Y$ なら $\text{tr}(f(X)) > \text{tr}(f(Y))$ である。

⁶これはこのような条件を満たすユニタリ U の取り方によらずに定まる。

⁷多項式を $x \in \mathbb{C}$ の関数とみなし、各 $x \in \mathbb{C}$ に対する極限を考える。

証明. $X \leq Y$ と min-max 定理より, X の (重複度を込めた) k 番目に大きい固有値は Y の k 番目に大きい固有値以下である. よって, $f(X)$ の k 番目に小さい固有値は $f(Y)$ の k 番目に小さい固有値以上である. トレースは固有値の総和であるから, $\text{tr}(f(X)) \geq \text{tr}(f(Y))$ が成り立つ. $X \leq Y$ かつ $X \neq Y$ なら, $\text{tr}(Y - X) > 0$ であるため, ある $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ について X の k 番目に大きい固有値は Y の k 番目に大きい固有値より真に小さい. これより後半も示せる. $\square$

次の **interlacing inequality** とよばれる不等式 (3) は, min-max 定理の系として得られる.

定理 6. $A, B \in \mathcal{M}_n$ をエルミート行列, $A \leq B$, $\text{rank}(B - A) \leq 1$ とする. A の固有値を (重複度を込めて) $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$, B の固有値を $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ とおく. このとき, 不等式

$$\beta_1 \geq \alpha_1 \geq \beta_2 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \beta_n \geq \alpha_n \quad (3)$$

が成り立つ.

次の事実もよく知られている. これは interlacing inequality と関係が深い.

補題 2. k を正の整数とする.

$$\alpha'_1 \geq \alpha_1 \geq \alpha'_2 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{k-1} \geq \alpha'_k$$

を実数とする. エルミート行列 $A \in \mathcal{M}_{k-1}$ の固有値が $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{k-1}$ のとき, 固有値が $\alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \dots \geq \alpha'_k$ であるエルミート行列 $A' \in \mathcal{M}_k$ であって, A' の左上の $(k-1) \times (k-1)$ 成分が A と一致するものが存在する.

証明. $UAU^* = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}) =: D$ となるユニタリ行列 $U \in \mathcal{M}_{k-1}$ をとる. $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathbb{R}$ に対し, $h = (h_1, h_2, \dots, h_{k-1})$ とおき, 行列 $\begin{pmatrix} D & h^* \\ h & h_k \end{pmatrix}$ について考える. この固有値は

$$\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} UAU^* & h^* \\ h & h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & (hU)^* \\ hU & h_k \end{pmatrix}$$

の固有値に一致する. したがって, 条件を満たす A' の存在をいうためには, $\begin{pmatrix} D & h^* \\ h & h_k \end{pmatrix}$ の固有値が $\alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \dots \geq \alpha'_k$ となるような $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathbb{R}$ を見つければよい. $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{k-1}$ である場合に示せば, 他の場合も容易に示せる. したがって, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{k-1}$ の場合を考えよう. $p \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ に対し

$$h_p = \sqrt{\frac{-\prod_{q=1}^k (\alpha_p - \alpha'_q)}{\prod_{q \in \{1, 2, \dots, k-1\} \setminus \{p\}} (\alpha_p - \alpha_q)}}$$

と定める (根号の中身は 0 以上の実数となることに注意). そして,

$$h_k = (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_k) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1})$$

と定める. ふたつの k 次多項式

$$\det \left(xI - \begin{pmatrix} D & h^* \\ h & h_k \end{pmatrix} \right), \quad \prod_{l=1}^k (x - \alpha'_l)$$

の差を $f(x)$ とおく. すると, f は高々 $k-2$ 次の多項式であり, また $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_{k-1}) = 0$ となることが確かめられるため, $f = 0$ である. ゆえに

$$\det \left(xI - \begin{pmatrix} D & h^* \\ h & h_k \end{pmatrix} \right) = \prod_{l=1}^k (x - \alpha'_l)$$

であり, 望み通り $\begin{pmatrix} D & h^* \\ h & h_k \end{pmatrix}$ の固有値が $\alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \cdots \geq \alpha'_k$ となる. $\square$

さいごにもうひとつ簡単な補題を用意しておく.

補題 3. エルミート行列 $X, Y \in \mathcal{M}_n$ が $X < Y$ を満たすと仮定する. $E \in \mathcal{M}_n$ を階数 1 の射影とする. このとき, $\max\{t \in \mathbb{R} \mid X \leq Y - tE\}$ が存在し, それを t_0 とおくと $\text{rank}(Y - t_0E - X) = n-1$ が成り立つ. また, $t < t_0$ に対し $X < Y - tE$ である.

証明. $X = 0$ と仮定しても一般性を失わない. このとき $0 < Y$ となる. $Y - tE = Y^{1/2}(I - tY^{-1/2}EY^{-1/2})Y^{1/2}$ だから, $I - tY^{-1/2}EY^{-1/2}$ について考えればよい. $Y^{-1/2}EY^{-1/2}$ は正・階数 1 の行列である. $tY^{-1/2}EY^{-1/2}$ が射影となる t を t_0 とおけば (つまり $t_0 = \|Y^{-1/2}EY^{-1/2}\|^{-1}$ とおけば), それは $I - tY^{-1/2}EY^{-1/2}$ が正となる最大の t に一致する. $I - t_0Y^{-1/2}EY^{-1/2}$ は階数 $n-1$ の射影であり, したがって $\text{rank}(Y - t_0E) = \text{rank}(Y^{1/2}(I - t_0Y^{-1/2}EY^{-1/2})Y^{1/2}) = n-1$ となる. $t < t_0$ に対し $0 < Y - tE$ であることも容易に確かめられる. $\square$

4 Cramer の予想の証明

狭義上三角, つまり $\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ という形である $n \times n$ 行列の全体を $\mathcal{T}_n$ と表す. 前節

までに引き続き, $0 \leq m \leq n$ に対し, P_m で対角行列 $\text{Diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m \text{ 個}}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m \text{ 個}})$ を表す. 射影 $P \in \mathcal{M}_n$ に対し, $P^\perp := I - P$ と定めると, $P^\perp$ も射影となる. ν の値を調べるにあたり, Arveson の距離公式 [3] の一種として知られる次の定理が重要である. 証明を知りたい方は [11] を参照されたい.

定理 7 ([13, Lemma], [12, Theorem 1]). $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n$ とする. このとき, 最小値 $\min_{T \in \mathcal{T}_n} \|A - T\|$ が存在し, それは $\max_{1 \leq k \leq n} \|P_{k-1}^\perp A P_k\|$ に等しい.

$N \in \mathcal{M}_n$ がベキ零であるためには, あるユニタリ行列 U について $UNU^* \in \mathcal{T}_n$ となる必要がある⁸. したがって, $n \times n$ ユニタリ行列全体を $\mathcal{U}_n$ と表せば, $\mathcal{N}_n = \{U^*TU \mid U \in \mathcal{U}_n, T \in \mathcal{T}_n\}$ が成り立つ. ゆえに, 任意の $A \in \mathcal{M}_n$ に対し

$$\nu(A) = \inf_{T \in \mathcal{T}_n, U \in \mathcal{U}_n} \|A - U^*TU\| = \inf_{T \in \mathcal{T}_n, U \in \mathcal{U}_n} \|UAU^* - T\| \stackrel{\text{定理 7}}{=} \inf_{U \in \mathcal{U}_n} \max_{1 \leq k \leq n} \|P_{k-1}^\perp UAU^* P_k\|$$

となる. ここで, $A = P_m$, $1 \leq m \leq n$ の場合を考える. $\{UP_mU^* \mid U \in \mathcal{U}_n\} = \mathcal{P}_{n,m}$ であるから,

$$\nu(P_m) = \inf_{P \in \mathcal{P}_{n,m}} \max_{1 \leq k \leq n} \|P_{k-1}^\perp P P_k\|$$

⁸ユニタリ行列による上三角化 (Schur triangulation) を考えよ.

が成り立つ。ゆえに、 $P \in \mathcal{P}_{n,m}$ に対し $\max_{1 \leq k \leq n} \|P_{k-1}^\perp P P_k\|$ を考えることが重要となる。

以下、 $P \in \mathcal{P}_{n,m}$ を固定して考える。一般に、行列 X, Y に対し

$$\|XY\|^2 = \|(XY)^*(XY)\| = \|Y^* X^* X Y\| = \|((X^* X)^{1/2} Y)^*((X^* X)^{1/2} Y)\| = \|(X^* X)^{1/2} Y\|^2$$

だから $\|XY\| = \|(X^* X)^{1/2} Y\|$ が成り立つ。同様に $\|XY\| = \|X(YY^*)^{1/2}\|$ である。これより、

$$\|P_{k-1}^\perp P P_k\| = \|(P_{k-1}^\perp P) \cdot (P P_k)\| = \|(P P_{k-1}^\perp P)^{1/2} \cdot (P P_k)\| = \|(P P_{k-1}^\perp P)^{1/2} \cdot (P P_k P)^{1/2}\|$$

である。よって、 $A_k = P P_k P$ ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$) と定めると、 $\|P_{k-1}^\perp P P_k\| = \|(P - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\|$ となる。 $A_k - A_{k-1} = P(P_k - P_{k-1})P$ であるから、 $0 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = P$, $\text{rank}(A_k - A_{k-1}) \leq 1$ である。

注意 1. $I - A_{k-1} = P^\perp + (P - A_{k-1})$ より、 $(I - A_{k-1})^{1/2} = P^\perp + (P - A_{k-1})^{1/2}$ である。また、 $A_k = P P_k P$ より $P^\perp A_k^{1/2} = 0$ である。以上より、 $(P - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2} = (I - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}$ であることがわかる。したがって、 $\|P_{k-1}^\perp P P_k\| = \|(I - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\|$ である。

$\theta := \pi(\frac{n}{m} + 2)^{-1}$ とおく。各 $1 \leq k \leq n$ に対し $(2 \cos \theta)^{-1}$ と $\|P_{k-1}^\perp P P_k\| = \|(I - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\|$ とを比較したい。ここで唐突だが、 $[0, \pi - 2\theta]$ から $[0, 1]$ への単調増大な全単射

$$t \mapsto \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin t}{\sin(t + \theta)}$$

を考える。この逆関数を用いた functional calculus により、 $0 \leq B_k \leq (\pi - 2\theta)P$ および

$$A_k = \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin B_k}{\sin(B_k + \theta I)} \quad (4)$$

を満たす $B_k \in \mathcal{M}_n$ が唯一つとれる^{9,10}。このとき、 $B_0 = 0$, $B_n = (\pi - 2\theta)P$ である。また、 $A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n$ より

$$\frac{\sin B_0}{\sin(B_0 + \theta I)} \leq \frac{\sin B_1}{\sin(B_1 + \theta I)} \leq \dots \leq \frac{\sin B_n}{\sin(B_n + \theta I)}$$

である。次の命題が重要である。

命題 1. 各 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し、

$$\|(I - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\| \leq (2 \cos \theta)^{-1} \iff \text{tr}(B_k - B_{k-1}) \leq \theta,$$

$$\|(I - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\| < (2 \cos \theta)^{-1} \iff \text{tr}(B_k - B_{k-1}) < \theta$$

が成り立つ。

まずこれを用いて $\nu(P_m) = (2 \cos \theta)^{-1}$ を導こう。

$\nu(P_m) \geq (2 \cos \theta)^{-1}$ の証明。

$$(\max_{1 \leq k \leq n} \|P_{k-1}^\perp P P_k\| =) \max_{1 \leq k \leq n} \|(I - A_{k-1})^{1/2} A_k^{1/2}\| < (2 \cos \theta)^{-1}$$

を仮定する。命題 1 より、各 k に対し $\text{tr}(B_k - B_{k-1}) < \theta$ となる。したがって、 $\text{tr}(B_n - B_0) < n\theta$ である。 $B_0 = 0$, $B_n = (\pi - 2\theta)P$ より、 $(\pi - 2\theta)m < n\theta$, つまり $\theta > \pi(\frac{n}{m} + 2)^{-1}$ となり、矛盾が得られた。□

⁹右辺の分母の $\sin(B_k + \theta I)$ は可逆で、 $\sin B_k$ と $\sin(B_k + \theta I)$ は交換可能なので、分数のように表しても問題は起らない。見やすさのため、このような表記を今後多用する。

¹⁰この式のような変形が証明のポイントとなる。このようにするとうまくいく理由はいまひとつわかっていない。

$\nu(P_m) \leq (2 \cos \theta)^{-1}$ の証明. 次の条件を満たす実数 $\beta_{kl} \in [0, \pi - 2\theta]$ ($1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq k$) を (なんでもよいので) 固定しておく.

(a) 任意の $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し $\sum_{l=1}^k \beta_{kl} = k\theta$ である.

(b) 任意の $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し

$$\beta_{k,1} \geq \beta_{k-1,1} \geq \beta_{k,2} \geq \beta_{k-1,2} \geq \dots \geq \beta_{k-1,k-1} \geq \beta_{k,k}$$

である.

(c) $l \leq m$ ならば $\beta_{nl} = \pi - 2\theta$, $l > m$ ならば $\beta_{nl} = 0$ である.

たとえば,

$$\beta_{kl} = \max\{\min\{\pi - 2\theta, k\theta - (l-1)(\pi - 2\theta)\}, 0\}$$

とすれば条件を満たすことがかんたんに確かめられる.

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin \beta_{kl}}{\sin(\beta_{kl} + \theta)} \in [0, 1]$$

とおく. 関数 $t \mapsto \sin t / \sin(t + \theta)$ は $[0, \pi - 2\theta]$ で単調なので, (b) より各 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し

$$\alpha_{k,1} \geq \alpha_{k-1,1} \geq \alpha_{k,2} \geq \alpha_{k-1,2} \geq \dots \geq \alpha_{k-1,k-1} \geq \alpha_{k,k}$$

となる. ゆえに, 補題 2 を繰り返し用いることで, エルミート行列 $Q \in \mathcal{M}_n$ であって, 各 k に対し Q の左上 $k \times k$ 成分のなす小行列の固有値が $\alpha_{k1} \geq \alpha_{k2} \geq \dots \geq \alpha_{kk}$ となるようなものがとれる. (c) より, $Q \in \mathcal{P}_{n,m}$ である. $A_k = QP_kQ$ とおく. 定理 3 より, $A_k = (P_kQ)^*(P_kQ)$ と $(P_kQ)(P_kQ)^* = P_kQP_k$ の固有値は (重複度を込めて) 一致する. よって, A_k の固有値は $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kk}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-k \text{ 個}}$ である. $0 \leq B_k \leq (\pi - 2\theta)Q$ および (4) を満たす $B_k \in \mathcal{M}_n$ をとる

と, その固有値は $\beta_{k1}, \beta_{k2}, \dots, \beta_{kk}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-k \text{ 個}}$ である. したがって, (a) より $\text{tr}(B_k - B_{k-1}) = \theta$ が $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し成り立つ. ゆえに, 命題 1 を $P = Q$ に適用すれば, 各 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し $\|P_{k-1}^\perp QP_k\| = (2 \cos \theta)^{-1}$ であることがわかる. $\square$

以下, 命題 1 の証明を行う. まず補題を 3 つ準備する. $\varphi := \theta/2$ とおく.

補題 4. エルミート行列 $B, B' \in \mathcal{M}_n$ が $0 \leq B \leq (\pi - 2\theta)I, 0 \leq B' \leq (\pi - 2\theta)I$ を満たすとする. このとき,

$$\frac{\sin B}{\sin(B + \theta I)} \leq \frac{\sin B'}{\sin(B' + \theta I)} \iff \cot(B + \varphi I) \geq \cot(B' + \varphi I)$$

である¹¹. また,

$$\text{rank} \left(\frac{\sin B}{\sin(B + \theta I)} - \frac{\sin B'}{\sin(B' + \theta I)} \right) = \text{rank} (\cot(B + \varphi I) - \cot(B' + \varphi I))$$

が成り立つ.

¹¹ $\cot t = \cos t / \sin t = 1 / \tan t$ は cotangent を表す.

証明. 公式 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ を交換可能なエルミート行列に適用して,

$$\begin{aligned}\sin(B + \varphi I \pm \varphi I) &= \sin(B + \varphi I) \cos(\varphi I) \pm \cos(B + \varphi I) \sin(\varphi I) \\ &= \cos \varphi \sin(B + \varphi I) \pm \sin \varphi \cos(B + \varphi I)\end{aligned}$$

を得る¹². ゆえに,

$$\frac{\sin B}{\sin(B + \theta I)} = \frac{\cos \varphi \sin(B + \varphi I) - \sin \varphi \cos(B + \varphi I)}{\cos \varphi \sin(B + \varphi I) + \sin \varphi \cos(B + \varphi I)} = \frac{2I}{I + \tan \varphi \cot(B + \varphi I)} - I$$

が成り立つ. 同様に,

$$\frac{\sin B'}{\sin(B' + \theta I)} = \frac{2I}{I + \tan \varphi \cot(B' + \varphi I)} - I$$

となる. ゆえに,

$$\frac{\sin B}{\sin(B + \theta I)} \leq \frac{\sin B'}{\sin(B' + \theta I)}$$

は

$$\frac{2I}{I + \tan \varphi \cot(B + \varphi I)} \leq \frac{2I}{I + \tan \varphi \cot(B' + \varphi I)}$$

と同値である. 定理 4 より, これはさらに $\cot(B + \varphi I) \geq \cot(B' + \varphi I)$ と同値である.

可逆行列に対する等式 $X^{-1} - Y^{-1} = X^{-1}(Y - X)Y^{-1}$ より, 階数に関する等式も得られる. $\square$

補題 5. エルミート行列 $B, B' \in \mathcal{M}_n$ が $0 \leq B \leq (\pi - 2\theta)I, 0 \leq B' \leq (\pi - 2\theta)I$ を満たすとする.

$$A = \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin B}{\sin(B + \theta I)}, \quad A' = \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin B'}{\sin(B' + \theta I)}$$

とおく. このとき,

$$\|(I - A)^{1/2}(A')^{1/2}\| \leq (2 \cos \theta)^{-1} \iff \cot(B' + \varphi I) \geq \cot(B + 3\varphi I), \quad (5)$$

$$\|(I - A)^{1/2}(A')^{1/2}\| < (2 \cos \theta)^{-1} \iff \cot(B' + \varphi I) > \cot(B + 3\varphi I) \quad (6)$$

が成り立つ.

証明. $\sin B + \sin(B + 2\theta I) = 2 \sin(B + \theta I) \cos(\theta I) = 2 \cos \theta \sin(B + \theta I)$ より,

$$I - \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin B}{\sin(B + \theta I)} = \frac{1}{2 \cos \theta} \cdot \frac{\sin(B + 2\theta I)}{\sin(B + \theta I)}$$

となる. ゆえに,

$$\|(I - A)^{1/2}(A')^{1/2}\| \leq (2 \cos \theta)^{-1} \iff \left\| \left(\frac{\sin(B + 2\theta I)}{\sin(B + \theta I)} \right)^{1/2} \left(\frac{\sin B'}{\sin(B' + \theta I)} \right)^{1/2} \right\| \leq 1$$

が成り立つ. また, 補題 4 の証明と同様の計算から, $S = \tan \varphi \cot(B + 3\varphi I), T = \tan \varphi \cot(B' + \varphi I)$ に対し

$$\frac{\sin(B + 2\theta I)}{\sin(B + \theta I)} = \frac{I + \tan \varphi \cot(B + 3\varphi I)}{I - \tan \varphi \cot(B + 3\varphi I)} = \frac{I + S}{I - S}$$

および

$$\frac{\sin B'}{\sin(B' + \theta I)} = \frac{I - \tan \varphi \cot(B' + \varphi I)}{I + \tan \varphi \cot(B' + \varphi I)} = \frac{I - T}{I + T}$$

¹² 交換可能なエルミート行列の組は, あるユニタリ行列により同时对角化できるため, このような式が成立する.

が成り立つ¹³.

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{I+S}{I-S} \right)^{1/2} \left(\frac{I-T}{I+T} \right)^{1/2} \right\| \leq 1 &\stackrel{(2)}{\iff} \left(\frac{I-T}{I+T} \right)^{1/2} \left(\frac{I+S}{I-S} \right) \left(\frac{I-T}{I+T} \right)^{1/2} \leq I \\
&\stackrel{(1)}{\iff} (I-T)^{1/2} \left(\frac{2I}{I-S} - I \right) (I-T)^{1/2} \leq I+T \\
&\iff 2(I-T)^{1/2} (I-S)^{-1} (I-T)^{1/2} \leq 2I \\
&\iff (I-T)^{1/2} (I-S)^{-1} (I-T)^{1/2} \leq I \\
&\stackrel{(2)}{\iff} (I-S)^{-1/2} (I-T) (I-S)^{-1/2} \leq I \\
&\stackrel{(1)}{\iff} I-T \leq I-S \\
&\iff \cot(B'+\varphi I) \geq \cot(B+3\varphi I)
\end{aligned}$$

であるから, (5) が示された. 同様の同値変形より (6) も得られる. $\square$

補題 6. エルミート行列 $B \in \mathcal{M}_n$ が $0 \leq B \leq (\pi - 2\theta)I$ を満たすとする. $E \in \mathcal{M}_n$ を階数 1 の射影とする. $\max\{t \in \mathbb{R} \mid \cot(B + \varphi I) - tE \geq \cot(B + 3\varphi I)\}$ を t_0 とおくとき,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{arccot}(\cot(B + \varphi I) - t_0 E) - (B + \varphi I)) = \theta$$

が成り立つ¹⁴. また, 実数 t に対し

$$\cot(B + \varphi I) - tE > \cot(B + 3\varphi I) \iff \operatorname{tr}(\operatorname{arccot}(\cot(B + \varphi I) - tE) - (B + \varphi I)) < \theta$$

である.

証明. $C = \cot(B + \varphi I) - t_0 E$, $D = \operatorname{arccot} C$ とおく. 補題 3 より, $\operatorname{rank}(C - \cot(B + 3\varphi I)) = n - 1$ が成り立つ. $\cot(B + \varphi I)$ の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, $C = \cot(B + \varphi I) - t_0 E$ の固有値を $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n$ とおくとき, interlacing inequality より,

$$\lambda_1 \geq \lambda'_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \lambda'_n$$

が成り立つ. したがって,

$$0 < \operatorname{arccot} \lambda_1 \leq \operatorname{arccot} \lambda'_1 \leq \operatorname{arccot} \lambda_2 \leq \operatorname{arccot} \lambda'_2 \leq \dots \leq \operatorname{arccot} \lambda_n \leq \operatorname{arccot} \lambda'_n < \pi$$

を得る.

$$\operatorname{tr}(B + \varphi I) = \sum_{k=1}^n \operatorname{arccot} \lambda_k, \quad \operatorname{tr} D = \sum_{k=1}^n \operatorname{arccot} \lambda'_k$$

であるから,

$$\operatorname{tr}(B + \varphi I) \leq \operatorname{tr} D < \operatorname{tr}(B + \varphi I) + \pi \tag{7}$$

が従う.

$$\cot t = i \left(\frac{2}{e^{2it} - 1} + 1 \right)$$

¹³ $-I \leq S \leq I$, $-I \leq T \leq I$ である. $I - S$, $I + T$ は可逆だが, $I + S$, $I - T$ は可逆と限らないことに注意.

¹⁴ arccot は $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ の逆関数 ($\operatorname{arccotangent}$) を表す.

より

$$\begin{aligned}
t_0 E &= \cot(B + \varphi I) - \cot D \\
&= i \left(\frac{2I}{e^{2i(B+\varphi I)} - I} + I \right) - i \left(\frac{2I}{e^{2iD} - I} + I \right) \\
&= 2i((e^{2i(B+\varphi I)} - I)^{-1} - (e^{2iD} - I)^{-1}) \\
&= 2i(e^{2i(B+\varphi I)} - I)^{-1}(e^{2iD} - e^{2i(B+\varphi I)})(e^{2iD} - I)^{-1},
\end{aligned}$$

ゆえに

$$1 = \text{rank}(t_0 E) = \text{rank}(e^{2iD} - e^{2i(B+\varphi I)}) = \text{rank}(e^{2iD} e^{-2i(B+\varphi I)} - I) \quad (8)$$

である。同様に,

$$n-1 = \text{rank}(C - \cot(B+3\varphi I)) = \text{rank}(e^{2iD} - e^{2i(B+3\varphi I)}) = \text{rank}(e^{2iD} e^{-2i(B+\varphi I)} - e^{4i\varphi} I) \quad (9)$$

である。(8), (9) より, ユニタリ $e^{2iD} e^{-2i(B+\varphi I)}$ の固有値はひとつを除き 1 で, 残りのひとつは $e^{4i\varphi} = e^{2i\theta}$ である. $e^{2iD} e^{-2i(B+\varphi I)}$ の行列式を考える¹⁵ことで, $e^{2i \text{tr } D} e^{-2i \text{tr}(B+\varphi I)} = e^{2i\theta}$ を得る. よって, $2i \text{tr } D - 2i \text{tr}(B + \varphi I) = 2i\theta + 2i\pi l$, つまり $\text{tr } D - \text{tr}(B + \varphi I) = \theta + \pi l$ なる整数 l が存在する. (7) より, $l = 0$ である. ゆえに, $\text{tr } D - \text{tr}(B + \varphi I) = \theta$ が従う. これが目標としていた等式に他ならない.

後半は, $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ が狭義単調減少な全単射であることと, 補題 1, 補題 3, および前半より従う. $\square$

命題 1 は補題 4, 5, 6 より直ちに従う ($B = B_{k-1}$, $B' = B_k = \text{arccot}(\cot(B + \varphi I) - tE) - \varphi I$ の場合を考えよ).

5 von Neumann 環への一般化

$\mathcal{B}(H)$ の $*$ 部分代数 (部分ベクトル空間で, $*$ および合成演算について閉じているもの) であって, I を含み, かつ強作用素位相 (各点収束位相) で閉であるものを **von Neumann 環** という. von Neumann 環であって, その中心が $\mathbb{C}I$ であるものを**因子環**とよぶ. von Neumann 環におけるほとんどの話題は因子環の場合に帰着される. 以下でも因子環の場合に限って考えることにする.

因子環は 5 つのタイプ (型) に分類される. 前節で扱った行列環 $\mathcal{M}_n$ は **I_n 型** とよばれる因子環であり, これはもっとも簡単な von Neumann 環であると考えられる. そのほかに次の 4 つのタイプがある.

- **I_∞ 型環** ... 無限次元 Hilbert 空間 H に対する $\mathcal{B}(H)$ がこれにあたる.
- **II₁ 型環** ... 無限離散群の左正則表現から構成されるたくさんの例などがある.
- **II_∞ 型環** ... II₁ 型環と I_∞ 型環のテンソル積で表される.
- **III 型環** ... ほかと比べかなり扱いが難しい. 富田竹崎理論を用いて調べられる.

¹⁵一般に, エルミート行列 X に対し $\det e^{2iX} = e^{2i \text{tr } X}$ であることに注意.

因子環 $\mathcal{A}$ とその元 A に対し、 $\mathcal{A}$ に属するベキ零作用素全体と A との距離を $\nu_{\mathcal{A}}(A)$ と表すことにする。射影 $P \in \mathcal{A}$ に対する $\nu_{\mathcal{A}}(P)$ について、先に述べた Herrero の結果および von Neumann 環の一般論から、次がわかる¹⁶。

定理 8 ([7, Corollary 9], [14, Section 8]). $\mathcal{A}$ を I_{∞} , II_{∞} , III のいずれかのタイプの因子環とする。 $P \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ を射影とする。

- $V^*V = I - P$ かつ $I - P \neq VV^* \leq I - P$ なる $V \in \mathcal{A}$ が存在するならば、 $\nu_{\mathcal{A}}(P) = 1/2$ である。
- そうでないならば、 $\nu_{\mathcal{A}}(P) = 1$ である。

残されていたのが I_n 型と II_1 型の場合である。これらの環は**有限型**の環とよばれ、特別な性質をもつ。von Neumann 環 $\mathcal{A}$ 上の線形汎関数 $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ が条件

- 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\tau(A^*A) \geq 0$,
- 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し $\tau(AB) = \tau(BA)$,
- $\tau(I) = 1$

を満たすとき、 τ を**トレース状態**という。実は、有限型因子環はトレース状態を唯一つ持ち、またトレース状態を持つ因子環は有限型である。論文 [8] では、有限型因子環について、射影 $P \in \mathcal{A}$ に対する $\nu_{\mathcal{A}}(P)$ を完全に決定した。

定理 9 ([8]). $\mathcal{A}$ を因子環、 τ を $\mathcal{A}$ 上のトレース状態、 $P \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ を射影とする。このとき、

$$\nu_{\mathcal{A}}(P) = \left(2 \cos \frac{\tau(P)\pi}{1 + 2\tau(P)} \right)^{-1}$$

が成り立つ。

$\mathcal{A} = \mathcal{M}_n$ のときは $\tau(A) = \text{tr } A/n$ であるため、定理 9 は前節の結果の拡張となる。定理 9 を II_1 型環に対し証明するにあたり、 $\nu_{\mathcal{A}}(P)$ の上からの評価については前節の結果を応用できる (II_1 型環の中に $\mathcal{M}_n$ のコピーが作れる、という事実を用いる)。下からの評価を得るためには前節と少し違う議論が必要となる。これは、 $\mathcal{M}_n$ を考える際に有効な「階数の差が 1 以下である行列の組」を用いる方法などが II_1 型環では使えず、命題 1 にあたる部分がそのままの形では成り立たないためである。そのかわりに、「連続値の階数」の役割を果たす量などをうまく考えることで証明ができる。詳しくは論文 [8] を参照されたい。

参考文献

- [1] C. Apostol, C. Foiaş, and D. Voiculescu, On the norm-closure of nilpotents. II. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **19** (1974), 549–577.
- [2] C. Apostol and N. Salinas, Nilpotent approximations and quasinilpotent operators. *Pacific J. Math.* **61**(1975), no. 2, 327–337.
- [3] W. Arveson, Interpolation problems in nest algebras. *J. Funct. Anal.* **20** (1975), no. 3, 208–233.

¹⁶この話題については、von Neumann 環論において最も難しいとされる III 型環の場合が比較的簡単に調べられる。von Neumann 環における作用素論的な研究では、 I_n 型や II_1 型の場合が III 型の場合より難しいということがときどき起こる。

- [4] Z. Cramer, The Distance from a Rank $n - 1$ Projection to the Nilpotent Operators on $\mathbb{C}^n$. *Canad. Math. Bull.* **64** (2021), no. 1, 54–74.
- [5] P.R. Halmos, Ten problems in Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), no. 5, 887–933.
- [6] J.H. Hedlund, Limits of nilpotent and quasinilpotent operators. *Michigan Math. J.* **19** (1972), 249–255.
- [7] D.A. Herrero, Normal limits of nilpotent operators. *Indiana Univ. Math. J.* **23** (1973/74/1974), 1097–1108.
- [8] M. Izumi and M. Mori, Determination of the distance from a projection to nilpotents. Preprint, arXiv:2406.09234.
- [9] G.W. MacDonald, Distance from projections to nilpotents. *Canad. J. Math.* **47** (1995), no. 4, 841–851.
- [10] M. Mori, On the distance from a matrix to nilpotents. *Linear Algebra Appl.* **679** (2023), 99–103.
- [11] 森 迪也, On the distance from a matrix to nilpotents. 令和 5 年度作用素論・作用素環論研究集会 講演集原稿. . . . 講演者のウェブサイト (論文一覧のページ下部) から入手可能.
- [12] S. Parrott, On a quotient norm and the Sz.-Nagy–Foiş lifting theorem. *J. Funct. Anal.* **30** (1978), no. 3, 311–328.
- [13] S.C. Power, The distance to upper triangular operators. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **88** (1980), no. 2, 327–329.
- [14] P. Skoufranis, Normal limits of nilpotent operators in von Neumann algebras. *Integral Equations Operator Theory* **77** (2013), no. 3, 407–439.