松尾　厚

練習問題

問題 1　距離空間 X および部分集合 $A \subset X$ であって，A は X の有界な閉集合だがコンパクトでないようなものの例を挙げよ。

問題 2　集合 $X = (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{R})$ に平面 $\mathbf{R}^2$ の位相の部分位相を与える。このとき，$\mathbf{R} \times \{0\}$ は X の開集合ではないが，$(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}$ は X の開集合であることを示せ。

問題 3　第一成分への射影 $p : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ に関する平面 $\mathbf{R}^2$ の Euclid 位相の商位相は直線 $\mathbf{R}$ の Euclid 位相に一致することを示せ。

問題 4　開区間 $X = (-\pi, \pi) \subset \mathbf{R}$ から平面 $\mathbf{R}^2$ への連続写像を次のように定める。

$$f : X \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (\sin t, \sin t \cos t)$$

(1)　写像 f は単射であることを示せ。

(2)　像 $f(X)$ は X と同相でないことを示せ。

問題 5　平面 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 $X = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1,\ -1 < x \leq 1 \right\}$ は可縮であることを示せ。

問題 6　集合 X を次のように定め，空間 $\mathbf{R}^2$ の Euclid 位相の部分位相を与える。

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ または } (x+1)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

位相空間 X の部分集合 $X_-(\varepsilon), X_+(\varepsilon)$ を次のように定める。

$$X_-(\varepsilon) = \{ (x, y) \in X \mid x < \varepsilon \}, \quad X_+(\varepsilon) = \{ (x, y) \in X \mid -\varepsilon < x \}$$

(1)　$\mathrm{Int} X_+(1) \cup \mathrm{Int} X_-(1) = X$ を示せ。

(2)　問 (1) および Mayer-Vietoris 長完全列を利用して整係数ホモロジー群 $H_k(X)$ を求めよ。ただし，S^1 の整係数ホモロジー群は既知として良い。